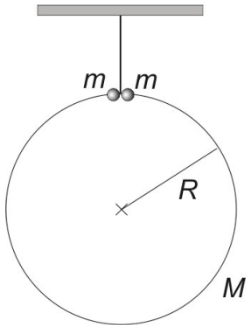
A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

FIZIKA

I. KATEGÓRIA

Javítási-értékelési útmutató

1. feladat: *Vékony, nyújthatatlan fonálra M tömegű, R sugarú karikát függesztünk. A karika legfelső pontjából szimmetrikusan két pontszerűnek tekinthető,* $m = 2M$ *tömegű, karikára fűzött gyöngy kezdősebesség nélkül, súrlódásmentesen lecsúszik.*
a) Mekkora az m tömegű gyöngyök elmozdulásának nagysága, amikor a fonálban ébredő erő először nullára csökken?
b) Mekkora az m tömegű gyöngyöknek, valamint a karika középpontjának, illetve a rendszer tömegközéppontjának a gyorsulása a fonál ellazulásának pillanatában?



Megoldás. *a)* A szimmetrikus elrendezés miatt a rendszer tömegközéppontja vízszintes irányban nem mozdul el. Határozzuk meg a karika és az egyik *m* tömegű gyöngy között ható kényszererő nagyságát! Jelölje *h* az *m* tömegű gyöngyök függőleges irányú elmozdulását, α a karika középpontjához viszonyított szögelfordulását, *N* pedig a karika által az *m* tömegű testre kifejtett kényszererőt:

$$h = R(1-\cos\alpha). \qquad (1)$$

Alkalmazzuk a mechanikai energiamegmaradás tételét vagy a munkatételt:

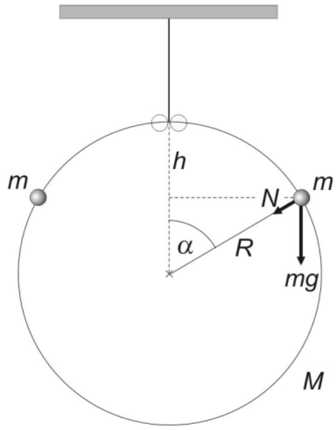
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből kapjuk:

$$v^2 = 2gh = 2gR(1-\cos\alpha). \qquad (3)$$

Írjuk fel a dinamika alapegyenletét sugárirányban:

$$mg\cos\alpha + N = \frac{mv^2}{R}. \qquad (4)$$



(3) és (4) összefüggések felhasználásával:

$$N = 2mg(1-\cos\alpha) - mg\cos\alpha = 2mg - 3mg\cos\alpha\,. \qquad (5)$$

A karikára az m tömegű gyöngy N-nel megegyező nagyságú, ellentétes irányú erővel hat, így a fonálerő akkor válik nullává, ha:

$$2N\cos\alpha = Mg\,. \qquad (6)$$

(5) és (6) felhasználásával és kihasználva, hogy $M = \frac{m}{2}$ kapjuk:

$$2(2mg - 3mg\cos\alpha)\cdot\cos\alpha = \frac{m}{2}g\,,$$

amelyből:

$$12\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 1 = 0\,. \qquad (7)$$

Az egyenlet megoldása $\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}$ és $\cos\alpha_2 = \frac{1}{6}$, amelyből a feladat megoldását $\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}$ adja, így $\alpha = 60°$, tehát ekkor az m tömegű gyöngyök elmozdulása ***R* nagyságú**.

b) A kérdéses helyzetben a fentiek alapján a centripetális és az érintő irányú gyorsulásból számolhatjuk az m tömegű gyöngyök gyorsulását.

Érintő irányban az m tömegű testre a dinamika alapegyenlete:

$$ma_{\text{é}} = mg\sin 60°\,,$$

amiből:

$$a_{\text{é}} = g\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

A centripetális gyorsulás, felhasználva a (3) összefüggést:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{2gR(1-\cos 60°)}{R} = g\,.$$

Így az m tömegű gyöngyök gyorsulásának nagysága:

$$a = \sqrt{a_{\text{cp}}{}^2 + a_{\text{é}}{}^2} = \sqrt{g^2 + \frac{3}{4}g^2} = \frac{g\sqrt{7}}{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx \mathbf{13{,}2}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}..$$

A karikára ható kényszererők vízszintes komponensei kiejtik egymást. Írjuk fel függőleges irányban a karikára a dinamika alapegyenletét arra a pillanatra, amikor a fonál meglazul. Jelölje A a karika középpontjának gyorsulását:

$$Mg - 2N\cos\alpha = MA\,.$$

Az előzőek alapján tudjuk, hogy a fonál ellazulásának pillanatában:

$$2N\cos\alpha = Mg\,,$$

így ebben a pillanatban a karika középpontjának gyorsulása:

$$A = \mathbf{0}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}..$$

A rendszerre ható külső erők eredője a nehézségi erő, így a rendszer tömegközéppontjának gyorsulása a nehézségi gyorsulással egyenlő:

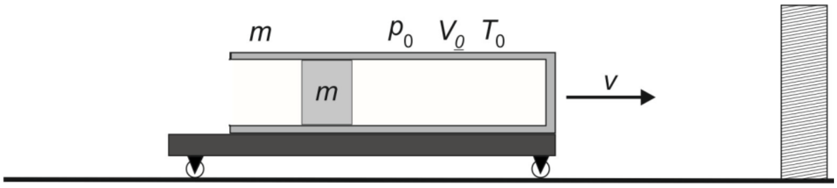
$$a_{\text{Tkp}} = \boldsymbol{g}.$$

Megjegyzések: 1. A rendszer tömegközéppontjának a gyorsulását a karika nulla gyorsulásának és a gyöngyök ismert gyorsulásainak tömegekkel súlyozott átlagaként is kiszámíthatjuk, eredményként g-t kell kapnunk, így ellenőrizhetjük a gyöngyök gyorsulására kapott eredményünket.
2. A karika tömegközéppontjának a gyorsulása a fonál ellazulása előtt is nulla, amit a folyamatosan csökkenő fonálerő biztosít, tehát számolás nélkül is kikövetkeztethetjük, hogy a fonál ellazulása pillanatában is még nulla a karika gyorsulása.

2. feladat: *Egy kis targoncához erősített hőszigetelő henger és a targonca együttes tömege* m = 12 kg. *A hengerben lévő, szintén* m = 12 kg *tömegű, könnyen mozgó dugattyú* V_0 = 50 liter *térfogatú,* T_0 = 300 K *hőmérsékletű,* p_0 = 10^5 Pa *nyomású levegőt zár el (a levegő tömege elhanyagolható a rendszer többi részéhez képest). A rendszer* v = 10 m/s *sebességgel halad egy fal felé, amellyel pillanatszerűen, tökéletesen rugalmasan ütközik. A súrlódási veszteségektől eltekinthetünk. A dugattyú jó hőszigetelő, a külső nyomás* p_0.

a) Mekkora maximális hőmérsékletet ér el a hengerbe zárt levegő a folyamat során?

b) Az ütközést követően mekkora lesz a bezárt levegő minimális hőmérséklete?



Megoldás. *a)* A fallal való ütközés utáni pillanatban a dugattyú még eredeti sebességével, a henger pedig az eredeti sebességének ellentettjével folytatja mozgását. Ettől a pillanattól kezdjük követni a folyamatot. A számunkra érdekes állapot akkor áll elő, amikor a bezárt levegő térfogata minimálissá válik egy pillanatra. Ez akkor következik be, amikor a dugattyú nem mozog tovább a hengerben, vagyis közös lesz a sebességük. Ez a sebesség pedig megegyezik a henger és dugattyú rendszer tömegközéppontjának sebességével. Mivel a henger és a dugattyú tömege megegyezik, a közös sebesség éppen nulla lesz!

A munkatétel szerint a rendszer mozgási energiájának megváltozása egyenlő a külső és belső erők munkájának összegével:

$$-2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=p_0(V_0-V)-\frac{f}{2}(pV-p_0V_0).$$

Ugyanezt más szavakkal úgy fejezhetjük ki, hogy a bezárt levegő belsőenergia-változása megegyezik a rendszer kezdeti mozgási energiájának és a külső levegő által végzett munkának az összegével:

$$\frac{f}{2}(pV-p_0V_0)=2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+p_0(V_0-V).$$

A bezárt gáz végső nyomása az adiabatikus összefüggésből:

$$p=p_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa}.$$

Ezt beírva az energia-egyenletünkbe, 2-vel való szorzás után ezt kapjuk:

$$f\left(p_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa}V-p_0V_0\right)=2mv^2+2p_0(V_0-V).$$

Alakítsuk át az egyenletet egyszerűbb formára:

$$fV_0^{\kappa}V^{1-\kappa} + 2V - (f+2)V_0 - \frac{2mv^2}{p_0} = 0.$$

Vegyük észre, hogy minden tag térfogat dimenziójú. Egyenletünket dimenzió nélkülivé tehetjük, ha minden tagját elosztjuk V_0-lal:

$$f\left(\frac{V}{V_0}\right)^{1-\kappa} + 2\left(\frac{V}{V_0}\right) - (f+2) - \frac{2mv^2}{p_0V_0} = 0.$$

Az egyes tagok szorzófaktorainak értéke: $f = 5$, illetve $-(f+2) - \frac{2mv^2}{p_0V_0} = -7{,}48$, tehát a következő egyenlet megoldását kell megkeresnünk:

$$5\left(\frac{V}{V_0}\right)^{1-\kappa} + 2\left(\frac{V}{V_0}\right) - 7{,}48 = 0, \quad \text{vagy} \quad 5x^{-0{,}4} + 2x - 7{,}48 = 0,$$

amit kalkulátorral vagy behelyettesítéses közelítéssel tehetünk meg.

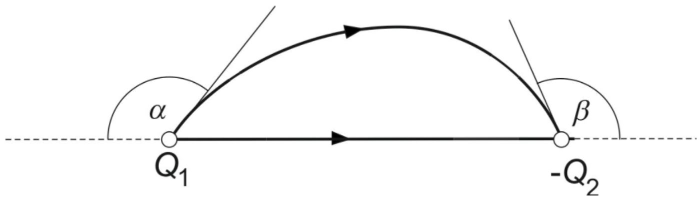
A feladatnak igen jól megfelel az $x = \frac{V}{V_0} = 0{,}5391$ érték, ami $V = 26{,}955 \approx 27$ liter térfogatnak felel meg (az egyenletet egy másik gyök is kielégíti: $x = 1.7344$, azonban csak az $x < 1$ gyök értelmes fizikailag). Ekkor a gáz hőmérséklete az adiabatikus összefüggés alapján:

$$T = T_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa-1} \approx \mathbf{384\ K.}$$

b) Az előző részben megkaptuk a bezárt gáz minimális térfogatát (27 liter) és maximális hőmérsékletét (384 K). Mi történik a későbbiekben? Azt kell észrevennünk, hogy az ütközést követő pillanatban a rendszer tömegközéppontja megáll. A dugattyú és a henger szimmetrikus mozgást végez. Tehát amikor az összenyomott gáz szétlöki a hengert és a dugattyút, akkor az előző folyamatnak a fordítottja játszódik le. Abban a pillanatban, amikor a két egyforma rész egymással ellentétesen 10 m/s sebességgel mozog, akkor benne a nyomás éppen újra 10^5 Pa, a hőmérséklet pedig 300 K lesz, és éppen ekkor újra ütközik a henger a fallal. Tehát a kiskocsi eltávolodik a faltól 10 m/s sebességgel, és a gáz térfogata tovább nem növekszik, hanem marad 50 liter, hőmérséklete pedig **300 K**. Ez lesz a bezárt levegő minimális hőmérséklete az ütközés után.

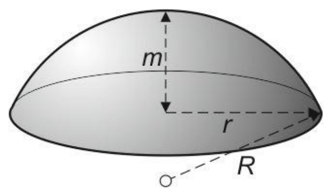
Vegyük észre, hogy a gáz lényegében úgy viselkedik, mint egy rugó. (Ha nem lennének egyformák a tömegek, akkor meglehetősen bonyolult az eset, mert csak a tömegközépponti rendszerben van meg az összenyomódás és a szétlökődés szimmetriája.)

3. feladat. *Mindentől távol lévő, egymáshoz közel elhelyezett* $+Q_1$ *pozitív és* $-Q_2$ *negatív, pontszerűnek tekinthető elektromos töltések által keltett elektromos teret vizsgáljuk. Tudjuk, hogy* $Q_1 > Q_2 > 0$. *Az elektromos tér leírására alkotta meg Faraday az erővonal fogalmát. A feladatban a pozitív töltésből kiinduló és a negatív töltésbe befutó erővonalakkal foglalkozunk. Használjuk az ábra jelölését, amelyben egy ilyen erővonalhoz húzott érintők* α, *illetve* β *szöget zárnak be a töltéseket összekötő egyenessel.*



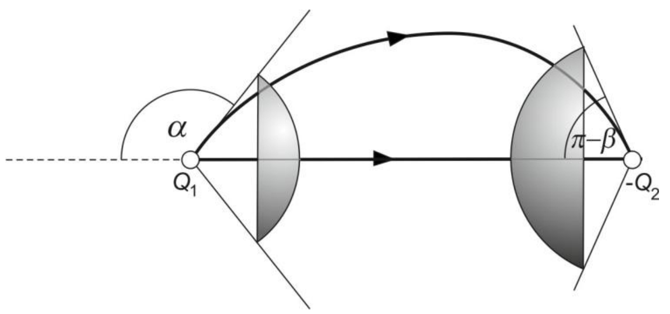
a) *Adjuk meg a kapcsolatot* Q_1, Q_2, α *és* β *között!*
b) *Mekkora* α *és* β *legkisebb és legnagyobb értéke a* 0-*tól* 180 *fokig terjedő intervallumban?*
c) *Határozzuk meg a* β *szög nagyságát, ha* $Q_2 = Q_1/2$, *továbbá* $\alpha = 135^\circ$!

Útmutatás: Az R sugarú gömb felületéből kivágott m magasságú gömbsüveg felszíne: $A = 2\pi Rm$.



Megoldás. Ismert, hogy Q töltésből $4\pi kQ = Q/\varepsilon_0$ erővonal indul ki, ha a töltés pozitív, és ugyanennyi fut be, ha a töltés negatív. Ha a ponttöltésekhez közel vagyunk, akkor az erővonalak eloszlása egyenletes, mert a messze lévő másik töltés hatása elhanyagolható. Mivel $Q_1 > Q_2 > 0$, így a Q_1 töltésből kiinduló $4\pi kQ_1 = Q_1/\varepsilon_0$ erővonal közül csak $4\pi kQ_2 = Q_2/\varepsilon_0$ fut be a negatív töltésbe, a többi elfut a végtelenbe.

a) A két töltést összekötő egyenes, mint tengely körül forgassuk meg a $+Q_1$ középpontú és α középponti szöghöz tartozó R sugarú körívet. Az így kapott gömbsüvegen kívül induló erővonalak mind megérkeznek (és más nem) azon a $-Q_2$ középpontú gömbsüvegen át, melyet úgy kapunk, hogy a $\pi-\beta$ középponti szögű körívet a két töltést összekötő egyenes, mint tengely körül megforgatjuk (lásd az ábrát).



A két említett gömbsüvegen átmenő erővonalak száma megegyezik:

$$\frac{4R^2\pi - 2\pi R\cdot R(1-\cos\alpha)}{4R^2\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}Q_1 = \frac{4R^2\pi - 2\pi R\cdot R(1-\cos\beta)}{4R^2\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}Q_2.$$

A fenti egyenletet rendezve megkapjuk a négy paraméter közötti kapcsolatot kifejező egyenletet:

$$(1+\cos\alpha)\cdot Q_1 = (1+\cos\beta)\cdot Q_2.$$

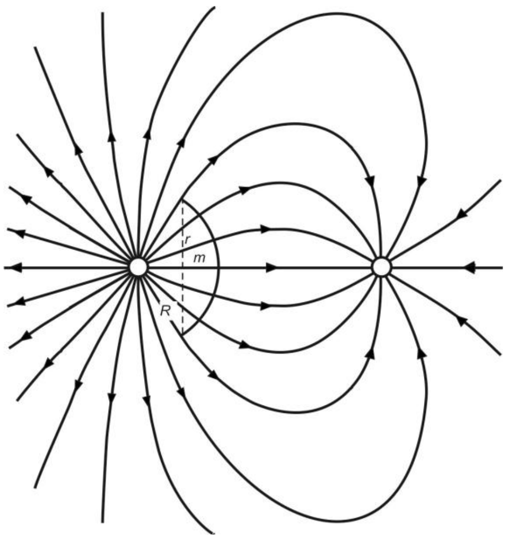
b) Az előzőek alapján (akár a fenti egyenlet nélkül is) azonnal meg tudjuk mondani, hogy α legnagyobb értéke 180°, amihez β legnagyobb értéke, vagyis 180° tartozik, valamint az is világos, hogy β legkisebb értéke 0°.

A legkisebb α értéket úgy tudjuk meghatározni, hogy kiszámítjuk annak a kicsiny *R* (elhanyagolható) sugarú gömbsüvegnek a nyílásszögét, ami „szembe néz” a negatív töltéssel, és rajta $4\pi k Q_2$ erővonal halad át. Az *a)* feladatrészből kapott összefüggésből ($\beta = 0$):

$$\cos\alpha_{\min} = \frac{2Q_2}{Q_1} - 1,$$

$$\alpha_{\min} = arc\ \cos\left(\frac{2Q_2}{Q_1} - 1\right).$$

A helyzetet jól mutatja a következő ábra:



c) Ha a negatív töltés abszolút értéke éppen fele a pozitív töltés számértékének, akkor

$$\alpha_{\min} = 90^\circ,$$

vagyis a „szembe néző” gömbsüveg egy félgömb.

Alkalmazzuk az *a)* feladatrésznél kapott összefüggést:

$$(1+\cos\alpha)\cdot Q_1 = (1+\cos\beta)\cdot Q_2.$$

Használjuk fel, hogy $Q_2 = \frac{Q_1}{2}$, továbbá $\alpha = 135^\circ$:

$$\cos\beta = 2\cdot\cos\alpha + 1 = 1-\sqrt{2} \approx -0,41\ .$$

Amiből $\beta \approx$ **114,47°**.

Pontozási útmutató

1. feladat

a) A dinamikai egyenletek felírása:	5 pont
A mechanikai energia-megmaradás tételének felírása:	2 pont
A számítások elvégzése:	3 pont
A numerikus eredmények kiszámítása:	2 pont
b) Az m tömegű testek gyorsulásának meghatározása:	4 pont
A karika középpontja gyorsulásának meghatározása:	2 pont
A tömegközéppont gyorsulásának meghatározása	2 pont

összesen: 20 pont

2. feladat

a) Az ütközést követő mozgás helyes értelmezése	2 pont
A minimális térfogat (maximális. hőmérséklet) beálltának helyes értelmezése	2 pont
A munkatétel helyes felírása	2 pont
A belsőenergia-változás helyes felírása	2 pont
Az energia-egyenlet az adiabatikus összefüggéssel való helyes felírása	2 pont
A kapott egyenlet helyes megoldása	4 pont
A maximális hőmérséklet numerikus megadása	2 pont
b) A bezárt gáz minimális hőmérsékletének megadása indokolással	4 pont

összesen: 20 pont

3. feladat

Annak kimondása, hogy a töltésekből induló erővonalak száma egyenesen arányos a töltéssel	3 pont
A Q_1-ből induló és Q_2-be megérkező erővonalak által döfött gömbsüvegek leírása szavakkal vagy rajzzal	2 pont
A két gömbsüveg felszínének helyes felírása (Amennyiben ez megvan, az előző pontszám is megadható)	2 pont
A Q_1 és Q_2 elektromos töltések közötti erővonalak számának helyes felírása	2 pont
a) A négy paraméter közötti kapcsolatot kifejező egyenlet felírása	4 pont
b) β és α legkisebb értékének helyes felírása	4 pont
c) β szög meghatározása	3 pont

összesen: 20 pont

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár. A nehézségi gyorsulás értékére 9,81 m/s^2 vagy 10 m/s^2 egyaránt elfogadható, hacsak a feladat máshogy nem rendelkezik.