2023. július 8., szombat

1. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $n > 1$ összetett egész számot, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ jelölik n pozitív osztóit, akkor $d_{i+1} + d_{i+2}$ osztható d_i-vel minden $1 \leqslant i \leqslant k-2$ esetén.

2. feladat. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amelyben $AB < AC$. Jelölje ABC körülírt körét Ω, melyen legyen S (az A pontot tartalmazó) CB ív felezőpontja. Az A pontból BC-re bocsátott merőleges a BS egyenest D-ben, az Ω kört pedig az $E \neq A$ pontban metszi. Továbbá a BC-vel párhuzamos, D ponton átmenő egyenes az L pontban metszi a BE egyenest. Jelölje a BDL háromszög körülírt körét ω, és legyen P az ω és Ω körök B-től különböző metszéspontja.
Bizonyítsuk be, hogy az ω-hoz P-ben húzott érintő és a BS egyenes a $BAC\sphericalangle$ belső szögfelezőjén metszik egymást.

3. feladat. Minden $k \geqslant 2$ egész számra határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot, melyhez létezik olyan $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ polinom, amelyre $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ nemnegatív egész számok, és

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

fennáll minden $n \geqslant 1$ esetén.

Munkaidő: négy és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

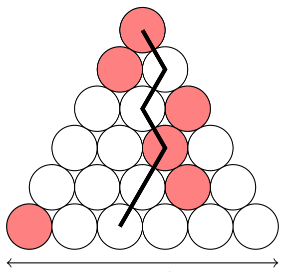
2023. július 9., vasárnap

4. feladat. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ páronként különböző pozitív valós számok, melyekre fennáll, hogy

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

egész szám minden $n = 1, 2, \ldots, 2023$ esetén. Mutassuk meg, hogy $a_{2023} \geqslant 3034$.

5. feladat. Legyen n egy pozitív egész. Egy *japán háromszög* $1 + 2 + \cdots + n$ körből áll, szabályos háromszög alakban elrendezve úgy, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén az i-edik sor pontosan i kört tartalmaz, melyek közül pontosan egy piros színű. *Nindzsa-út*nak nevezünk egy n körből álló sorozatot, mely a legfelső sorból indul, egy kört a közvetlenül alatta lévő két kör valamelyike követ, és a legalsó sorban végződik. Az alábbi ábrán egy japán háromszög látható az $n = 6$ esetben; a berajzolt nindzsa-út két piros kört tartalmaz.



Határozzuk meg a legnagyobb k értéket (n függvényében), melyre fennáll, hogy minden japán háromszögben található olyan nindzsa-út, ami legalább k piros kört tartalmaz.

6. feladat. Legyen ABC egy szabályos háromszög. Legyenek A_1, B_1, C_1 az ABC olyan belső pontjai, melyekre $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, valamint

$$BA_1C\sphericalangle + CB_1A\sphericalangle + AC_1B\sphericalangle = 480°.$$

Legyen továbbá BC_1 és CB_1 metszéspontja A_2, CA_1 és AC_1 metszéspontja B_2, valamint AB_1 és BA_1 metszéspontja C_2.

Bizonyítsuk be, hogy ha az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai páronként különböző hosszúak, akkor az AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 háromszögek körülírt köreinek két közös pontja van.