Kiss Árpád
Országos Közoktatási
Szolgáltató Intézmény

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2001–2002-es tanév
első forduló
Haladók – I. kategória
(szakközépiskolai tanulók)

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $0 < a < 1$ számra

$$\frac{2000^2}{1-a} + \frac{1}{a} \geqslant 2001^2 \ !$$

Milyen a-ra áll fenn egyenlőség?

Megoldás. Mivel $a > 0$ és $1 - a > 0$, így $a(1-a)$-val szorozva nem változik az egyenlőtlenség iránya:

$$2000^2 a + 1 - a \geqslant 2001^2 a(1-a).$$ 2 pont

Egy oldalra rendezve kapjuk a következő, az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget:

$$2001^2 a^2 + (2000^2 - 2001^2 - 1)a + 1 \geqslant 0,$$ 2 pont

$$2001^2 a^2 - 4002a + 1 \geqslant 0,$$

$$(2001a - 1)^2 \geqslant 0.$$ 2 pont

Ez az egyenlőtlenség nyilván teljesül, és egyenlőség csak $a = \dfrac{1}{2001}$-re áll fenn, ami nyilván 0 és 1 között van. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzések. 1. Természetesen akkor is jár a teljes pontszám, ha a másodfokú egyenlet megoldóképletével következtetünk, észrevéve, hogy egy gyöke van a bal oldali másodfokú kifejezésnek, és hogy a parabola felfelé áll.

2. A felírt egyenlőtlenségben 2000-et bármilyen valós számmal helyettesítve is igaz, hogy $\dfrac{x^2}{1-a} + \dfrac{1}{a} \geqslant (x+1)^2$, ahol $x \in \mathbf{R}$ és $0 < a < 1$.

2. Az ABC háromszög AB oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja H, a BC oldal B-hez legközelebbi negyedelőpontja N_1, C-hez legközelebbi negyedelőpontja N_2. A CA oldal felezőpontja F.

Bizonyítsa be, hogy az FHN_1 és az FHN_2 háromszögek területének összege az ABC háromszög területének felével egyenlő!

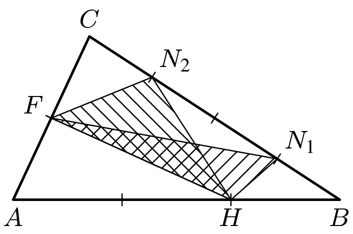
Megoldás. Használjuk az ábrák jelöléseit!

(1)
$$T_{FHN_1} = T_{ABC} - (T_{AHF} + T_{HBN_1} + T_{FN_1C})$$

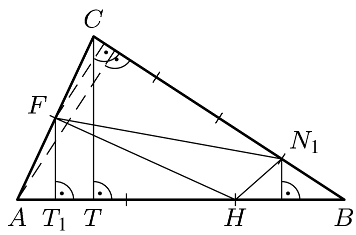
$T_{ABC} = \dfrac{\overline{AB} \cdot m_{AB}}{2}$,

$$T_{AHF} = \frac{\overline{AH} \cdot m_{AH}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} T_{ABC} = \frac{1}{3} T_{ABC},$$ 1 pont

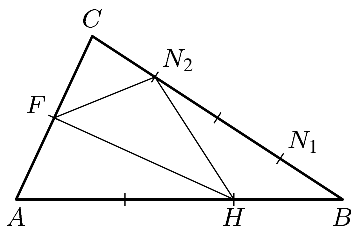
mert $\overline{AH} = \dfrac{2}{3}\overline{AB}$, és $ATC\triangle \sim AT_1F\triangle$ miatt (a hasonlóság aránya $2:1$) $m_{AH} = \dfrac{1}{2} m_{AB}$.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Ugyanezért $T_{HBN_1} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} T_{ABC}$, mert $HB = \dfrac{1}{3}AB$, $m_{HB} = \dfrac{1}{4} m_{AB}$. 1 pont

$$T_{FN_1C} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} T_{ABC},$$ 1 pont

mert $T_{ABC} = \dfrac{BC \cdot m_{BC}}{2}$, $CN_1 = \dfrac{3}{4}BC$, $m_{CN_1} = \dfrac{1}{2} m_{BC}$.

(1′)
$$T_{FHN_1} = T_{ABC} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{3}{8}\right) T_{ABC} = \frac{5}{24} T_{ABC}$$ 1 pont

(2)
$$T_{FHN_2} = T_{ABC} - (T_{AHF} + T_{HBN_2} + T_{FN_2C}).$$

A fenti gondolatmenetet követve: $T_{AHF} = \dfrac{1}{3} T_{ABC}$, $T_{HBN_2} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4} T_{ABC} = \dfrac{1}{4} T_{ABC}$.

$T_{FN_2C} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} T_{ABC} = \dfrac{1}{8} T_{ABC}$. 1 pont

(2′)
$$T_{FHN_2} = T_{ABC} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) T_{ABC} = \frac{7}{24} T_{ABC}.$$ 1 pont

$T_{FHN_1} + T_{FHN_2} = \left(\dfrac{5}{24} + \dfrac{7}{24}\right) T_{ABC} = \dfrac{1}{2} T_{ABC}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\left(x^2+y^2\right)^3=\left(x^3-y^3\right)^2$$

egyenletet!

Megoldás. A kijelölt műveleteket elvégezve az

$$x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6=x^6-2x^3y^3+y^6$$

egyenlethez jutunk. 1 pont

0-ra rendezve és x^2y^2-et kiemelve:

$$x^2y^2(3x^2+3y^2+2xy)=0.$$ 1 pont

Egy szorzat 0, ha valamelyik tényezője 0, így nyilván megoldások az $x=0$, $y\in\mathbf{R}$ vagy az $x\in\mathbf{R}$, $y=0$ számkettősök. 1 pont

A zárójelben lévő kifejezés,

$$3x^2+3y^2+2xy=2x^2+2y^2+(x+y)^2,$$

csupa nemnegatív szám összege, ez csak akkor lehet 0, ha $x=0$ és $y=0$. 3 pont

Így az egyenlet megoldásait az $x=0$, y tetszőleges valós és az x tetszőleges valós, $y=0$ alakú számpárok adják. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy 2001 egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege osztható 27-tel!

Megoldás. Vegyük észre, hogy a 2001 darab szám közül az első 1000 egyike 000-ra végződik. 2 pont

Legyen ez a szám x, számjegyeinek összege pedig y. Ekkor az x, $x+1$, …, $x+999$ számok mindegyike a kiválasztott 2001 között van. 2 pont

Számjegyeik összege között pedig előfordul y, $y+1$, …, $y+27$ mindegyike (és csak ezek), hiszen három számjegy összege 0 és 27 között bármi lehet. 2 pont

Ezek között nyilván van olyan, amelyik osztható 27-tel (ha y 27-es maradéka k, akkor $y+27-k$ megfelelő). 1 pont

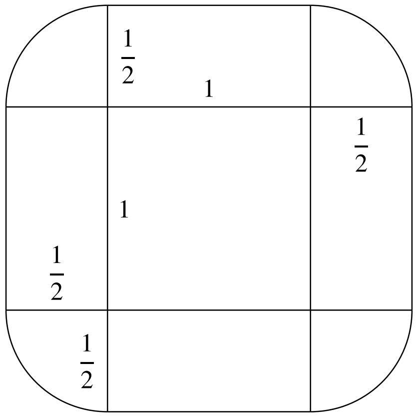
---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. A megoldásból kiolvasható, hogy már 1998 egymást követő egész számra is teljesül a feladat állítása.

5. Egy 20×25-ös téglalapban elhelyeztünk tetszőlegesen 120 db egységnyi oldalú négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy még egy olyan egységnyi átmérőjű kör is elfér a téglalapban, amelynek nincs közös belső pontja a négyzetekkel! (Négyzeten most négyzetlapot, körön pedig körlapot értünk.)

Megoldás. A kör pontosan akkor helyezhető el a feltételeknek megfelelően a téglalapban, ha középpontja messzebb van mind a téglalap, mind pedig a négyzetek oldalaitól, mint fél egység. 1 pont



A téglalapra nézve ez azt jelenti, hogy a középen levő 19×24-es téglalapban kell, hogy legyen a kör középpontja. 1 pont

A négyzetekre nézve pedig azt jelenti a feltétel, hogy a kör középpontjának kívül kell lennie a négyzetek köré rajzolt (ábrán látható) lekerekített sarkú „négyzeteken”. 1 pont

Egy ilyen „lekerekített négyzet” területe (mivel a sarkoknál levő részből egy egységnyi átmérőjű kör rakható össze)

$$3 + \frac{\pi}{4}.$$ 1 pont

Mivel 120 ilyen alakzatunk van, ezért ezek összterülete $360 + 30\pi$, ami kisebb $19 \cdot 24 = 456$-nál, azaz a belső téglalap területénél. Így van olyan pontja ennek a téglalapnak, amelyet nem fednek le az alakzatok. 2 pont

Az első észrevételünk miatt az e pont köré írt egységnyi átmérőjű kör megfelelő lesz. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Természetesen a $360 + 30\pi < 456$ egyenlőtlenséget igazolni kell. Ez átalakítva a $\pi < 3{,}2$ egyenlőtlenséget adja, ami teljesül. Igazolás nélküli állításért 1 pontot le kell vonni.

Az **I. kategóriából** a legalább **16 pontot** elért versenyzők közül azok jutnak a második fordulóba, akiknek legalább egy feladatra adott megoldása lényegében teljes.

A **II. kategóriából** a legalább **18 pontot** elért versenyzők közül azok jutnak a második fordulóba, akiknek legalább egy feladatra adott megoldása lényegében teljes.

A kijavított dolgozatokat az iskolában kell megőrizni a tanév végéig. Csak a továbbjutó versenyzők nevét és elért pontszámát (feladatonkénti bontásban) kell beküldeni elektronikus úton, illetve az „Értékelő űrlapok” másolatán, 2002. január 5-ig.

Kiss Árpád OKSZI címe: 1399 Budapest, Pf. 701/432

A borítékra, kérjük, írják rá: ARANY DÁNIEL VERSENY – HALADÓK

A második forduló idejéről (2002. február 21.) és helyéről a versenyzőket az iskola értesíti.