1. feladat (AD_HALADOK_2002_3ford_lkat_1fel)
Az a, b, c számok pozitív egészek, ahol

$$c=\frac{ab}{a+b}.$$

Határozzuk meg az (a; b; c) számhármasokat úgy, hogy a számhármasok tagjai között a lehetö legtöbb prímszám legyen.
1. megoldás (AD_HALADOK_2002_3ford_lkat_1fel_1mego)
a és b nyilván nem lehet egyszerre páratlan prím, mert akkor az egyenletünk jobb oldalán a számlálóban páratlan, a nevezöben páros szám állna. Emiatt ha a és b is prím, akkor az egyik 2. A szimmetria miatt (a és b szerepe felcserélhetö) feltehetjük, hogy a = 2. Ekkor

$$c=\frac{2b}{2+b}=\frac{2b+4-4}{2+b}=2-\frac{4}{2+b}$$

Ebböl következöleg b egyetlen lehetséges értéke esetünkben 2 (ha b > 2, akkor a tört értéke nem egész, és 2-nél kisebb pozitív prím nincs). Ekkor c = 1 adódik. Emiatt kijelenthetjük: mindhárom szám nem lehet prím, de kettö igen. Lehet még, hogy c és a jobboldalon álló számok egyike prím, a szimmetria miatt legyen ez a, de ez esetben a ≠ 2-t is kiköthetjük, hiszen az a = 2 esetet már tárgyaltuk. Ekkor nyilván b-nek párosnak kell lennie (a megoldás elején elmondottakhoz hasonló okból), ezek szerint b = 2k, ahol k 1-nél nagyobb egész szám (b sem lehet 2). Ekkor

$$c=\frac{2k\cdot a}{2k+a}$$

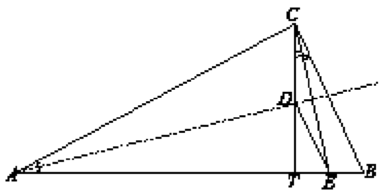
$$ac=2k(a-c)$$

Mivel a jobboldal páros, nyilván a baloldalnak is annak kell lennie, és úgy, hogy c prím legyen, ez csak c = 2 esetén lehetséges. Ekkor viszont

$$k=\frac{a}{a-2}$$

a páratlan, és mivel az egymást követö páratlan számpárok tagjai relatív prímek egymáshoz, k csak a = 3 esetén lesz egész. Ebböl a = 3, b = 6, c = 2 adódik, és természetesen ennek a szimmetrikus párja, a = 6, b = 3, c = 2 is jó megoldás.
A feladatnak ezek szerint három számpár a megoldása, ezek:
a = 2 b = 2 c = 1
a = 3 b = 6 c = 2
a = 6 b = 3 c = 2

1. feladat (AD_HALADOK_2002_3ford_lkat_2fel)
Az *ABC* háromszögben *BC* ≤ *CA* < *AB*, ahol a C csúcsból induló magasság talppontja T.
A *BAC* szög szögfelezöje a *CT* magasságot a D pontban, a *BCT* szög szögfelezöje az *AB* oldalt E-ben metszi.
Bizonyítsuk be, hogy az *ABC* háromszög akkor és csak akkor derékszögü, ha az *ED* szakasz párhuzamos a *BC* oldallal.
1. megoldás (AD_HALADOK_2002_3ford_lkat_2fel_1mego)



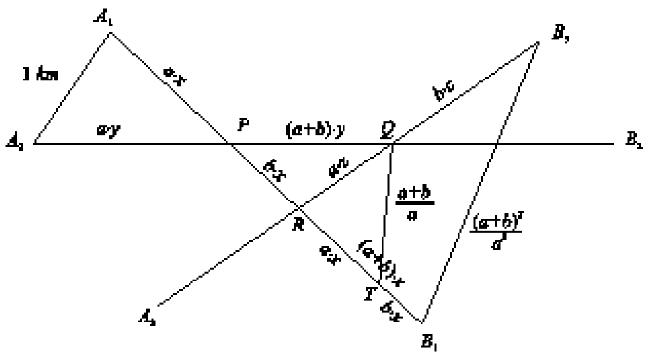
A feladatot két részben kell megoldanunk.
a) Lássuk be, hogy ha *ABC* háromszög derékszögü, *BC* párhuzamos *ED*-vel.
b) Lássuk be, hogyha *ABC* háromszögben *BC* párhuzamos *ED*-vel, akkor az a háromszög derékszögü.

a) Ekkor a feladat állítása miatt a háromszög nyilván C-nél derékszögü. Emiatt *ACT* és *BCT* háromszögek szögeik egyenlösége miatt hasonlók, és D ugyanolyan arányú osztópontja *CT*-nek, mint E *BT*-nek. Ezért állításunk a *BTC* szögre felírt párhuzamos szelök tételének megfordításából következöleg igaz.
b) Ekkor a *BCT* szögre felírt párhuzamos szelök tételéböl következöleg D olyan arányban osztja *CT*-t, mint E *BT*-t. Emiatt hasonló egymáshoz az*ACT* és a *BCT* háromszög, hiszen a megfelelö belsö szögfelezö tételekböl látszik, hogy megegyezik két-két oldaluk aránya, és ezek közül a nagyobbikkal szemközt egyenlö szög: derékszög van. Ekkor *CAT*□ + *TCA*□ = 90, és *TCB*□ = *TAC*□, ebböl pedig *ABC* háromszög derékszögüsége következik.

1. feladat (AD_HALADOK_2002_3ford_Ikat_3fel)

Egy országban, sík terepen hat város között három egyenes út vezet. Az elsö A_1-böl B_1-be, a második A_2-böl B_2-be, a harmadik pedig A_3-ból B_3-ba.
A_i-böl minden reggel 8 órakor elindul egy f_i futár, aki állandó sebességgel haladva pontosan délben érkezik B_i-be (i = 1, 2, 3).
Az út során f_1 és f_2 9 órakor találkozik, f_1 és f_3 10 órakor, f_2 és f_3 pedig 11 órakor.
Milyen hosszú a B_1B_3 távolság, ha A_1 és A_2 1 km-re, A_2 és A_3 pedig 3 km-re fekszik egymástól?

1. megoldás (AD_HALADOK_2002_3ford_Ikat_3fel_1mego)



Legyen f_1 futár sebessége x, f_2-é y, és f_3-é z. f_1 és f_2 találkozzon a P pontban, f_1 és f_3 az R pontban, f_2 és f_3 a Q pontban. Így az A_1P szakasz hossza a·x, a *PR* szakasz hossza b·x, a *RB*$_1$ szakasz hossza (a+b)·x , az A_2P szakasz hossza a·y, a *PQ* szakasz hossza (a+b)·y, a *QB*$_3$ szakasz hossza b·z, a *QR* szakasz hossza a·z. Legyen T a *QB*$_1$ szakasz a:b arányú osztópontja. Mivel az A_1PA_2 és a *QPT* szög egyenlö nagyságú, és a közrefogó oldalak aránya megegyezik, ezért az A_1PA_2 és a *QPT* háromszög hasonló, a hasonlóság aránya a:(a+b). Ennek alapján az *RT* szakasz hossza

$\frac{a+b}{a}$. A *QRT* és a B_3RB_1 háromszögben a B_3RB_1 és a *QRT* szög és a közrefogó oldalak aránya megegyezik, ezért ez a két háromszög is hasonló. A hasonlóság aránya a:(a+b), ezért a B_1B_3 szakasz hossza

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^2$$