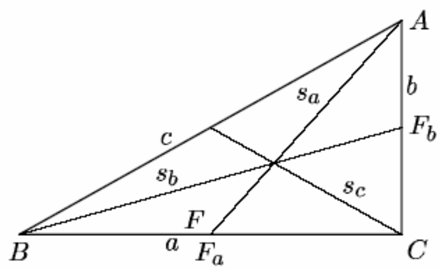
Országos Közoktatási,
Értékelési és Vizsgaközpont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2003–2004-es tanév
második forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög súlyvonalaiból – mint oldalakból – derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor ez a háromszög hasonló az eredetihez.



Megoldás. Ábránk jelöléseit használva Pitagorasz tétele alapján

$$s_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 = \frac{a^2 + 4b^2}{4}$$

és

$$s_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{4a^2 + b^2}{4},$$

továbbá $c^2 = a^2 + b^2$. Mivel $FC = s_c$ a háromszög köré írt körének sugara, ezért

$$s_c^2 = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$ 1 pont

Ha $a \geq b$, akkor $s_b \geq s_a > s_c$, de ha derékszögű háromszög szerkeszthető a súlyvonalakból, akkor $s_b > s_a > s_c$ lehetséges csak. 1 pont

A feltétel szerint így $s_b^2 = s_a^2 + s_c^2$ alapján $4a^2 + b^2 = (a^2 + 4b^2) + (a^2 + b^2)$, ahonnan rendezéssel $a = b\sqrt{2}$ adódik. 2 pont

Ekkor pedig $s_a = b \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$, $s_b = b \cdot \frac{3}{2}$ és $s_c = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. 1 pont

A megfelelő oldalak aránya így:

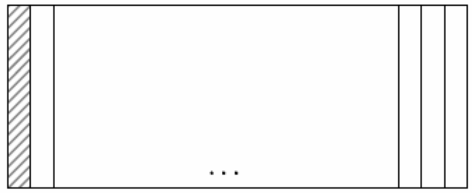
$$\frac{s_c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{s_a}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{s_b}{c} = \frac{3}{2} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ 1 pont

Az arányok mindhárom oldalpár esetén azonosak, ezért a súlyvonalakból szerkeszthető háromszög hasonló az eredetihez. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy 4000 cm^2 területű téglalapban adott 2004 darab pont. Mutassuk meg, hogy ezek között van három olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe 2 cm^2-nél kisebb.

Megoldás. Osszuk fel a 4000 cm^2 területű téglalapot az egyik oldallal húzott párhuzamosokkal 1001 darab egybevágó téglalapra! 1 pont



Egy kis téglalap (például a vonalkázott) $\frac{4000}{1001}\ \text{cm}^2$ területű. 1 pont

Az egyik kis téglalapban biztosan van legalább 3 darab pont, hiszen $2 \cdot 1001 < 2004$. 2 pont

De egy kis téglalapba írható háromszög területe legfeljebb a téglalap területének a fele, ezért a megfelelő kis téglalapból választott három pont által meghatározott háromszög t területére teljesül, hogy 2 pont

$$t \leq \frac{4000}{2 \cdot 1001}\ \text{cm}^2 = \frac{2000}{1001}\ \text{cm}^2 < 2\ \text{cm}^2.$$ 1 pont

Ezzel pedig állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés. Annak igazolásáért, hogy egy téglalapba legfeljebb feleakkora területű háromszög írható – korrekt igazolás esetén – maximum 2 plusz pont adható.

Összesen: 7 pont

3. Egy derékszögű háromszög területe 2004 területegység. Lehet-e a háromszög mindhárom oldalának hossza egész szám értékű?

Megoldás. Legyen a háromszög két befogója a és b, átfogója pedig c.

A feltételek szerint $\frac{ab}{2} = 2004$, azaz $ab = 2^3 \cdot 3 \cdot 167$. 1 pont

Tegyük fel, hogy létezik a feltételeknek megfelelő a, b, c pozitív egész szám.

Ekkor például $a \leq b$ esetén a 167 szám prím volta miatt 167 csak b osztója lehet, hiszen az ab szorzat osztható 167-tel. 1 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy $b \geq 167$, így $a \leq 2^3 \cdot 3 = 24$. 1 pont

A $c^2 = a^2 + b^2$ pitagoraszi összefüggés $a^2 = (c-b)(c+b)$-re rendezett párok alakjából leolvasható, hogy $c - b \geq 1$, hiszen $c > b$ és $c + b \geq 168 + 167 = 335 > 324 = 18^2$.

Így tehát $a^2 > 18^2$, azaz $a > 18$. 1 pont

Ha viszont $18 < a \leq 24$, akkor csak $a = 24$ lehetséges, hiszen $2^3 \cdot 3 \cdot 167$-nek osztója az a szám. 1 pont

De $a = 24$ esetén $b = 167$, ekkor pedig $c^2 = a^2 + b^2$ alapján $167^2 = (c-24)(c+24)$. 1 pont

167 prím volta miatt $c - 24 < c + 24$ alapján így $c - 24 = 1$ és $c + 24 = 167^2$ az egyetlen lehetséges eset. A két egyenlőség egyszerre nem teljesülhet, tehát nem lehetnek az oldalak egész számok. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Oldjuk meg a $\sqrt{2p-x}-\sqrt{x-p}=p-2$ egyenletet, ahol a p paraméter értéke egész szám.

Megoldás. Értelmezés: $p \leq x \leq 2p$, ahonnan következik, hogy $p \geq 0$, így $x \geq 0$ is teljesül.

Az $f(x)=\sqrt{2p-x}-\sqrt{x-p}$ függvény szigorúan monoton csökken, ezért

$$-\sqrt{p} \leq f(x)=p-2 \leq \sqrt{p}.$$ 1 pont

Ekkor $0 \leq p+\sqrt{p}-2$ és $p-\sqrt{p}-2 \leq 0$, azaz

$$0 \leq (\sqrt{p}-1)(\sqrt{p}+2) \quad \text{és} \quad (\sqrt{p}-2)(\sqrt{p}+1) \leq 0.$$

Az egyenlőtlenségekből $p \geq 1$, illetve $p \leq 4$ adódik.

Így $1 \leq p \leq 4$, tehát p értéke 1, 2, 3, 4 lehet. 2 pont

I. $p=1$:

$\sqrt{2-x}-\sqrt{x-1}=-1$, ahol $1 \leq x \leq 2$. Ekkor $0 \leq \sqrt{2-x}=\sqrt{x-1}-1 \leq 0$ alapján $x=2$. 1 pont

II. $p=2$:

$\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}=0$, ahol $2 \leq x \leq 4$.

Az egyenlet gyöke $4-x=x-2$ alapján $x=3$. 1 pont

III. $p=3$:

$\sqrt{6-x}-\sqrt{x-3}=1$, ahol $3 \leq x \leq 6$. Rendezéssel és négyzetre emeléssel $6-x=x-3+$ $+2\sqrt{x-3}+1$, azaz $4-x=\sqrt{x-3}$ adódik. Újabb rendezéssel az $x^2-9x+19=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, ahol az előző gyökös egyenlet szerint $x \leq 4$.

A másodfokú egyenlet megfelelő gyöke $x=\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$. 1 pont

IV. $p=4$:

$\sqrt{8-x}-\sqrt{x-4}=2$, ahol $4 \leq x \leq 8$. Rendezéssel $8-x=x-4+4\sqrt{x-4}+4$, azaz $4-x=2\sqrt{x-4}$ adódik.

Az egyenlet gyöke most $x=4$. 1 pont

Tehát a gyökök rendre $x=$	2;	3;	$\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$;	4,
ha p értéke	1;	2;	3;	4.

Összesen: 7 pont