

## Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

### 2003/2004 10. évfolyam 1. kategória 3. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgálató Intézmény Pedagógiai Központ

#### 1. feladat

Adott egy derékszögű trapéz  $a$  hosszú alapja, amelyen hegyesszög is van. A másik alapnak és a trapéz magasságának összege  $b$ , ahol  $a < b$ . Bizonyítsuk be, hogy ha a trapéz területe maximális, akkor a hegyesszögre illeszkedő szár hossza nagyobb  $a \cdot \sqrt{2}$ -nél.

#### 2. feladat

Az  $x$  valós számra teljesül, hogy  $x^4 + ax^3 + (2 - 12a^2)x^2 + ax + 1 = 0$ , ahol az  $a$  paraméter értéke egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3}$$

hányados értéke egész szám.

#### 3. feladat

Legfeljebb hány egész szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő összege, semelyik kettő különbsége és semelyik kettő szorzata se legyen osztható 2004-gyel?