Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2004/2005-ös tanév
I. forduló
kezdők I–II–III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazolja, hogy $n^3 - 10\,101n^2 + 2n - 111$ mindig osztható 3-mal, ha n pozitív egész szám! (6 pont)

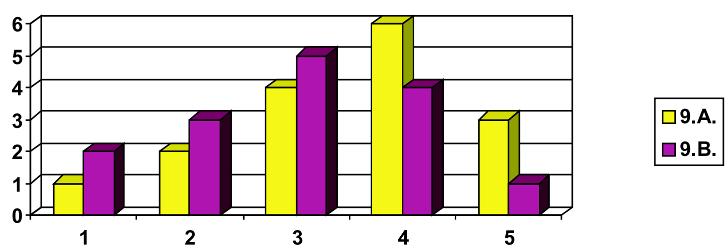
Megoldás.

$$n^3 - 10\,101n^2 + 2n - 111 = (n-1)n(n+1) - 10\,101n^2 + 3n - 111.$$

Minden tag osztható 3-mal, mert az első tag három egymást követő szám szorzata, az 10 101 számjegyeinek összege és 111-nek számjegyeinek összege is 3.

A második és a negyedik tag 3-mal való oszthatóságáért 1–1 pont adható.

2. Az alábbi táblázat két osztály matematika csoportjainak jegyeit tartalmazza. Ki tudunk-e cserélni a két csoportban két gyereket úgy, hogy a két csoport átlaga megegyezzen? (6 pont)



Megoldás. A 9.A. osztály átlaga $\dfrac{56}{16} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$, a 9.B. osztály átlaga $\dfrac{44}{15}$. 1 pont

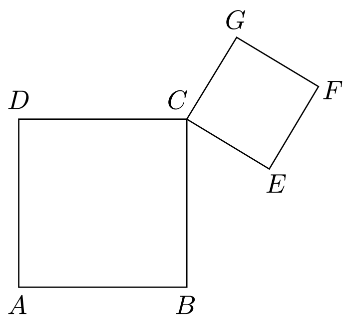
Ha 9.A.-ból egy x osztályzatú gyereket kicserélünk a 9.B. osztály y osztályzatú gyerekére, akkor teljesülnie kell az

$$\frac{56 - x + y}{16} = \frac{44 + x - y}{15}$$ 2 pont

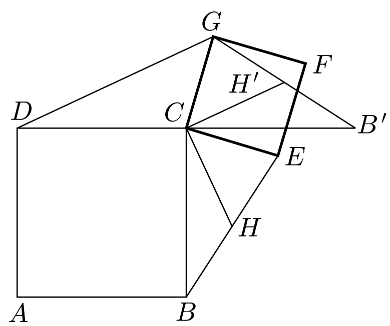
egyenlőségnek. Ebből

$$840 - 15x + 15y = 704 + 16x - 16y, \qquad 136 = 31(x-y),$$ 1 pont

Ami az egész számok körében nem lehetséges, hiszen $136 = 2^3 \cdot 17$. 2 pont



3. Adottak a síkon az azonos körüljárású $ABCD$ és $CEFG$ közös C csúcsú négyzetek, a B csúcs nem esik egybe az E-vel és a D csúcs nem esik egybe a G-vel. Legyen H a BE szakasz felezőpontja! Bizonyítsa be, hogy a CH egyenes merőleges a DG egyenesre! (8 pont)



Megoldás. A C pont körüli $90°$-os elforgatás B-t a D C-re vonatkozó B' tükörképébe, az E-t a G-be és így H-t a $B'G$ szakasz H' felezőpontjába viszi át. Ezért CH' a $DB'G$ háromszög középvonala, ami párhuzamos DG-vel. Tehát a CH egyenes merőleges a DG egyenesre.

Csak megfelelően indokolt megoldásra adható meg a 8 pont.

4. Mely x, y és z valós számokra teljesül a következő egyenlőség?

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = \frac{1}{z^2 + 4z + 5} \qquad \text{(10 pont)}$$

Megoldás. Teljes négyzetekké való kiegészítésekkel kapjuk, hogy:

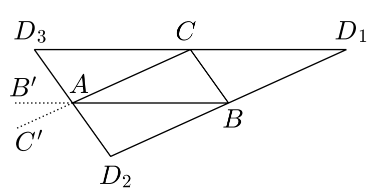
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + 1 = \frac{1}{(z+2)^2 + 1}. \qquad \text{3 pont}$$

Mivel az egyenlőség bal oldalán álló kifejezés értéke és a jobb oldalán lévő tört nevezője is legalább 1, az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha mindkét oldal értéke 1. 6 pont

Ez akkor és csak akkor igaz, ha $x = -1$, $y = 2$ és $z = -2$. 1 pont

5. Megadható-e a síkon 5 különböző pont úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesre és bármely három által alkotott háromszög azonos területű? (10 pont)

Megoldás. Először belátjuk, hogy ha négy pont rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, akkor ezek egy paralelogramma csúcspontjai. Nézzük az A, B, C pontokat és legyen B, ill. C A-ra vonatokozó tükörképe B', ill. C'!



$a)$ Ha a negyedik pont a D_1 és ez a CAB szögtartományban van, akkor:

$$t_{ABC} = t_{ABD_1} \quad \text{miatt} \quad CD_1 \parallel AB \quad \text{és}$$

$$t_{ACB} = t_{ACD_1} \quad \text{miatt} \quad BD_1 \parallel AC.$$

$b)$ Ha a negyedik pont a D_2 és ez a BAC' szögtartományban van, akkor:

$$t_{ACB} = t_{ACD_2} \quad \text{miatt} \quad BD_2 \parallel AC \quad \text{és}$$
$$t_{BCA} = t_{BCD_2} \quad \text{miatt} \quad AD_2 \parallel BC.$$

$c)$ A negyedik pont a $B'AC'$ szögtartományban nem lehet.

$d)$ Ha a negyedik pont a D_3 és ez a CAB' szögtartományban van, akkor:

$$t_{ABC} = t_{ABD_3} \quad \text{miatt} \quad CD_3 \parallel AB \quad \text{és}$$
$$t_{BCA} = t_{BCD_3} \quad \text{miatt} \quad AD_3 \parallel BC.$$

5 pont

Legyen egy paralelogramma egyik oldalegyenese e! Az ötödik pont nem lehet ugyanabban a félsíkban, mint a paralelogramma, mert ekkor az e-vel szemköztes f oldalegyenesen kéne lennie, ahol így három pont lenne. Ugyanez elmondható az f oldalegyenesből kiindulva is. Így két olyan félsíkot kapunk, amelyek diszjunktak és mindkettő tartalmazza az ötödik pontot. Ez ellentmondás, tehát nem adható meg a kívánt tulajdonsággal rendelkező öt pont. 5 pont