Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy 1111-től 2007-ig bármely egész szám osztója az alábbi összegnek:

$$\begin{array}{rrrrl} & 1\cdot & 2\cdot & 3\cdot & \ldots\cdot 896\ + \\ + & 2\cdot & 3\cdot & 4\cdot & \ldots\cdot 897\ + \\ + & 3\cdot & 4\cdot & 5\cdot & \ldots\cdot 898\ + \\ +\ldots & & & & \\ + & 1111\cdot & 1112\cdot & 1113\cdot & \quad\cdot 2006 \end{array}$$

2. Az R sugarú AB átmérőjű kört belülről érinti az r sugarú k kör az A pontban ($R > r$). Az R sugarú kör BC húrja az E pontban érinti a k kört. Ha a BE és CE szakasz mértani közepe megegyezik a két kör sugarának mértani közepével, akkor mekkora az $r : R$ arány értéke?

3. A Matematikai Kaszinóban a következő játékot játszhatjuk: 1-től 10000-ig vannak számok egy urnában, ezek közül véletlenszerűen kihúznak egyet. Ha *szép* szám jött ki, kapunk n forintot, ha nem, be kell fizetnünk 1 forintot. A Kaszinóban *szépnek* nevezik azokat az a egész számokat, amelyek oszthatók negyedik gyökük egészrészével, tehát $\left[\sqrt[4]{a}\right] \mid a$.

(a) Hány *szép* szám van 1-től 10 000-ig?

(b) Melyik az a legkisebb egész n, amire érdemes játszani?

Az eredményhirdetést 2007. június 1-jén (pénteken) 13.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).