Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Feladatok

1. Jelöljük $G(x)$-szel egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész x szám számjegyeinek összegét! Hány olyan $1 \leqq x \leqq 2007$ pozitív egész szám van, melyhez létezik olyan $y > x$ pozitív egész szám, hogy $x + G(x) = y + G(y)$?

2. Definiáljuk az a_n $(n \geqq 0)$ sorozatot a következőképpen: $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ és $n \geqq 2$-re $a_n := 6\,a_{n-1} - a_{n-2}$. Bizonyítsa be, hogy $\left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^n \cdot a_{n+1} - \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{n+1} \cdot a_n = 1$ minden $n \geqq 0$-ra!

3. Adott egy egységnyi területű szabályos háromszög belsejében két pont úgy, hogy ez a két pont és a háromszög három csúcsa együtt 5 olyan pontot ad, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek csúcsai az említett 5 pont közül valók és jelöljük ezen háromszögek területei közül a legkisebbet $t_{\min}$-nel! Mennyi $t_{\min}$ lehetséges maximális értéke, és a két belső pont mely elhelyezkedése mellett érhető ez el?