Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Jelöljük $G(x)$-szel egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész x szám számjegyeinek összegét! Hány olyan $1 \leqq x \leqq 2007$ pozitív egész szám van, melyhez létezik olyan $y > x$ pozitív egész szám, hogy $x + G(x) = y + G(y)$?

Megoldás. Azt állítjuk, hogy a megfelelő x-ek a következők:

91–99; 191–199; ...; 891–899; 982–989; 992–999;

1091–1099; ...; 1891–1899; 1982–1989; 1992–1999.

Ez pedig összesen $9 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 9 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 194$ db szám.

Állításunkat a következő módon bizonyítjuk:

A 9-cel való oszthatóság szabálya szerint x és $G(x)$ ugyanolyan maradékot ad 9-cel osztva. Ebből az következik, hogy $x + G(x) = y + G(y)$ csak akkor állhat fenn, ha y és x különbsége osztható 9-cel, azaz $9 \mid y - x = G(x) - G(y)$. Tehát y pontosan annyival nagyobb x-nél, amennyivel nagyobb x számjegyeinek az összege, mint y-nak; továbbá ez a különbség 9-nek többszöröse.

Ha x és y is legfeljebb 2-jegyű szám, akkor $G(x)$ és $G(y)$ értékére is legalább 1 és legfeljebb 18 lehet. Ezért $G(x) - G(y) < 18$, tehát $y - x = 9$ lehet csak, azaz $y = x + 9$. Ha x 0-ra végződik, akkor $G(x+9) = G(x) + 9$, minden más esetben $G(x+9) = G(x)$ (hiszen a tízes helyi érték 1-gyel nő, míg az 1-es helyi érték 1-gyel csökken), tehát soha nem teljesül, hogy $G(x) > G(y)$.

Teljesen hasonló érvelés mondható el az összes olyan esetre, amikor x és y az utolsó két jegy kivételével megegyezik.

Csak olyan esetek jöhetnek tehát szóba, amikor x és y felírásában a 100-asok helyén található jegy eltér egymástól. (Ha ezek a jegyek egyenlők lennének és csak az ezreseknél, vagy még magasabb helyi értéken különbözne x és y, akkor $y - x > 900$ lenne, de $G(x) - G(y) > 900$ csak legalább 100-jegyű számokra teljesülhetne.)

A legkisebb szóba jöhető x és y számok a 91 és a 100. Ezek valóban megfelelőek is. Hasonlóan jó lesz minden további x egészen 99-ig. (Az x értéke és a számjegyeinek összege is mindig 1-gyel nő, és ugyanez igaz a megfelelő y-okra is.)

Hasonló mondható el a 191–199, 219–299, ..., 891–899-ig terjedő x értékekre, továbbá az 1091–1099, 1191–1199, ..., 1891–1899 számokra is.

Az eddig talált számpárokra mindig teljesült, hogy $y - x = 9$. Ez nem véletlen, ugyanis a 2-jegyű számokra alkalmazott érveléshez hasonlóan itt is belátható, hogy mindig fennáll rájuk a $G(x) - G(y) < 18$ egyenlőtlenség.

Külön kezelendők azonban azok az x, y számpárok, melyekre $x < 1000$ és $y \geqq 1000$. Az ilyen számpárokra $G(x) - G(y) < 27$, tehát $y - x$ legfeljebb 18 lehet. A legkisebb lehetséges x tehát a 982. Áttekintve a 18-féle lehetséges x értéket, azt kapjuk, hogy a 982–989, és a 992–999 értékek megfelelőek.

Hasonlóan adódik, hogy $x < 2000$ és $y \geqq 2000$ esetén az 1982–1989 és az 1992–1999 értékek jöhetnek szóba x-re és ezek mind valóban jók.

2. Definiáljuk az a_n $(n \geqq 0)$ sorozatot a következőképpen: $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ és $n \geqq 2$-re $a_n := 6\,a_{n-1} - a_{n-2}$. Bizonyítsa be, hogy $\left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^n \cdot a_{n+1} - \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n+1} \cdot a_n = 1$ minden $n \geqq 0$-ra!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 0$-ra a bizonyítandó egyenlőség nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy valamely n-re már igazoltuk a fenti egyenlőséget.

Vizsgáljuk most $(n+1)$-re! Azt kell igazolnunk, hogy:

$$\left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n+1} \cdot a_{n+2} - \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n+2} \cdot a_{n+1} = 1.$$

Felhasználjuk a sorozat definícióját, majd ekvivalens átalakításokat végzünk.

$$\left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n+1} \cdot (6 \cdot a_{n+1} - a_n) - \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n+2} \cdot a_{n+1} = 1.$$

$$\underbrace{\left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n} \cdot a_{n+1} - \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n+1} \cdot a_n}_{1} +$$

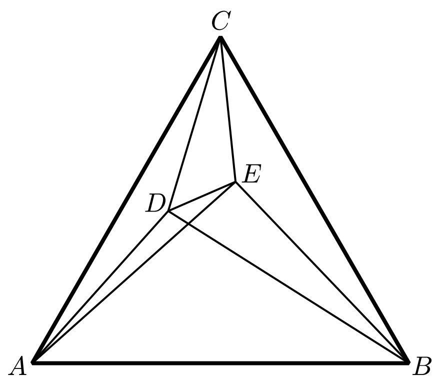
$$+ \left(6 \cdot \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n}\right) \cdot a_{n+1} - \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n+2} \cdot a_{n+1} = 1.$$

$$1 + a_{n+1} \cdot \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^{n} \cdot \left(6 \cdot \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right) - 1 - \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^2\right) = 1.$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy $6 \cdot \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right) - 1 - \left(3 - 2\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 0$ és ezzel az állítást igazoltuk.

3. Adott egy egységnyi területű szabályos háromszög belsejében két pont úgy, hogy ez a két pont és a háromszög három csúcsa együtt 5 olyan pontot ad, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek csúcsai az említett 5 pont közül valók és jelöljük ezen háromszögek területei közül a legkisebbet t_{min}-nel! Mennyi t_{min} lehetséges maximális értéke, és a két belső pont mely elhelyezkedése mellett érhető ez el?

Megoldás.



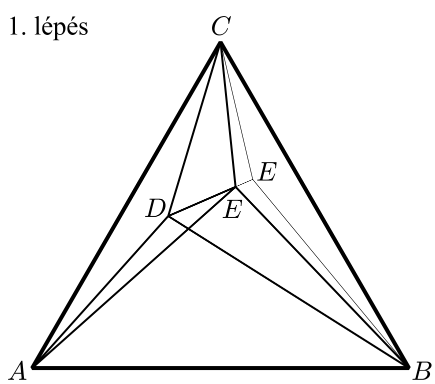
Legyenek a háromszög pontjai A, B és C. A háromszög belsejében lévő két pont pedig D és E. Ebből az 5 pontból 10-féleképpen választhatunk ki 3-at. Ennyi háromszöggel kell tehát foglalkoznunk. A két belső pont, D és E meghatároz egy egyenest mely a háromszögnek pontosan kettő oldalát metszi. Feltehetjük, hogy ezek BC és CA. Az ABC háromszög területe biztosan nem lehet t_{min}. Az AEC és a BCD háromszögeknél is van kisebb területű (nevezetesen az ADC, illetve a BCE háromszögek). Most belátjuk, hogy ABE és ABD területe sem lehet t_{min}. Amelyik a kettő közül nagyobb területű, az biztosan nem lehet. Nézzük most azt, amelyik kisebb (illetve ha egyenlő területűek, akkor az egyiküket). Szimmetria-okok miatt feltehető, hogy ez mondjuk az ABD (alapábra). Az AED háromszög biztosan kisebb nála, hiszen a közös AD oldalhoz tartozó magassága kisebb (csakúgy, mint minden, a háromszög belsejében lévő ponté.)

Elég tehát most már csak 5 háromszögre koncentrálni. Ezek közül három tartalmazza a DE szakaszt, míg a másik kettő a BCE és az ADC háromszögek.

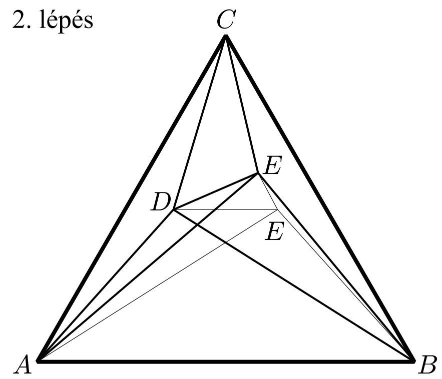
Induljunk ki a D és az E pontoknak egy tetszőleges elrendezéséből. Ezek után több lépésben megváltoztatjuk ezen pontok helyzetét (van, hogy csak az egyikükét, míg máskor mindkettőét egyszerre). Mindezt úgy hajtjuk végre, hogy ügyelünk arra, hogy minden lépésben úgy változzon meg a vizsgált 5 háromszög területe, hogy a minimális terület ne csökkenhessen.

(A következő ábrák ezeknek a változtatásoknak a menetét szemléltetik.)

1. lépés

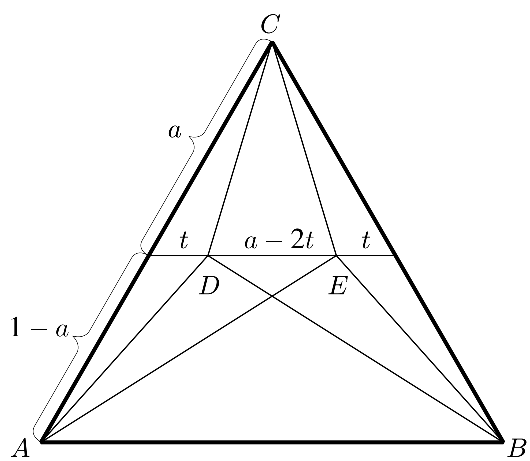


Az 1. lépésre akkor van szükség, ha az ADC és a BCE háromszögek területe nem egyenlő. (Ha egyenlők, akkor ugorhatunk a 2. lépésre.) Ha a BCE nagyobb, akkor az E, ha pedig az ADC nagyobb, akkor a D ponttal végezzük el a következőket. Ezt a pontot (legyen mondjuk az E) a DE szakasz meghosszabbításán eltoljuk addig, hogy az ADC és a BCE háromszögek területe egyenlő legyen. Mindeközben az ADC területe nem változik, a DEC, a DEA és a DEB területe nő, hiszen a közös DE alapjuk hosszabbá válik, a BCE pedig csak addig csökken, amíg el nem éri az ADC nagyságát.



A 2. lépésben E-t eltoljuk a BC-vel párhuzamosan addig, amíg a DE szakasz párhuzamos lesz AB-vel. (Ha máris párhuzamos vele, akkor tovább haladhatunk a következő lépéssel.) Az ADC és a BCE területe nem változik mindeközben. A DEC és az AED háromszögek területe nő, hiszen az E pont olyan irányban mozog, mely távolodóban van a mozgás egyenesének AD-vel, illetve DC-vel való metszéspontjától. A BED területe csökken (az E pont az eredeti BED háromszög belsejében mozog), de csak addig, amíg el nem éri az AED területét.

3. lépés: Ha a DE szakasz az AB-vel párhuzamos középvonal C-hez közelebbi oldalán van, akkor mozgassuk a D és E pontokat AC-vel, illetve BC-vel párhuzamosan a középvonalig. Eközben ADC és BCE területe változatlan, DEC területe pedig nő. AED és BED területe esetleg csökkenhet, de mindig legalább akkorák lesznek, mint DEC területe.



A D és az E pontok optimális elhelyezkedése tehát csak a középvonalon, vagy annak AB-hez közelebbi oldalán lehetséges. Vegyünk fel egy AB-vel párhuzamos szakaszt ebben a tartományban. (A továbbiakban a könnyebb számolás kedvéért tekintsük az ABC háromszög oldalát egységnyinek.) Legyen ennek a szakasznak a hossza a ($\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$). Legyen D és E egyformán t távolságra a szakasz megfelelő végpontjaitól. Ekkor $DE = a - 2t$. A vizsgált 5 háromszög közül 2–2 szimmetrikusan helyezkedik el. Tehát 3-féle területérték jelenhet meg. Jelöljük ADC területét T_1-gyel, míg AED területét T_2-vel, DEC területét pedig T_3-mal. Mivel $T_3 \geqq T_2$, ezért T_1 és T_2 közül valamelyik minimális. Ha $T_1 \neq T_2$, akkor mozgassuk D-t (és persze vele együtt E-t is) addig, hogy $T_1 = T_2$ legyen. Eközben a kisebbik terület nő, a nagyobb pedig csak addig csökken, amíg egyenlő nem lesz vele. (T_3 is változik, de $T_3 \geqq T_2$ végig fennáll.) Számoljuk ki T_1-et, illetve T_2-t. (Az ABC háromszög magassága m.)

$$T_1 = t \cdot \frac{m}{2}; \quad T_2 = (a - 2t) \cdot (1 - a) \cdot \frac{m}{2}$$

$$T_1 = T_2 \;\Rightarrow\; t \cdot \frac{m}{2} = (a - 2t) \cdot (1 - a) \cdot \frac{m}{2} \;\Rightarrow\; t = (a - 2t) \cdot (1 - a).$$

Innen kétféle módon folytathatjuk:

a) *variáns:* $-a^2 + a \cdot (1 + 2t) - 3t = 0$. Hogy legyen megoldás a-ra, a diszkriminánsnak nem-negatívnak kell lennie: $D = 4t^2 - 8t + 1 \geqq 0$. Ezt t-re megoldva azt kapjuk, hogy

$$t \leqq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{vagy} \quad t \geqq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel $1+\frac{\sqrt{3}}{2}>1$, ezért csak $t \leqq 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lehetséges. A maximális érték tehát $t=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Megoldva a fenti, az a-ra másodfokú egyenletet, $a=\frac{-(1+2t)}{-2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. $t_{\min}$ maximális értéke tehát

$$T_1 = t\cdot\frac{m}{2} = t\cdot 1\cdot\frac{m}{2} = t\cdot AB\cdot\frac{m}{2} = t\cdot t_{ABC}.$$

Visszatérve az eredeti feltevéshez, miszerint $t_{ABC}=1$,

$$\max(t_{\min}) = 1-\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}133\,974\,596\ldots$$

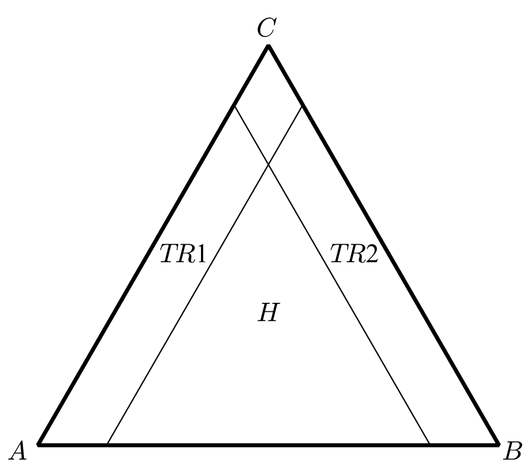
adódik.

(Ez jobb, mint a középvonali elhelyezkedésből adódó 0,125.)

b) *variáns:* $t=\frac{a-a^2}{3-2a}$. Vezessük be a következő jelölést: $d=3-2a$. Átírva a kifejezést:

$$t=\frac{-\frac{1}{4}d^2+d-\frac{3}{4}}{d} = 1-\frac{1}{4}\cdot\frac{d^2+3}{d}.$$

Az 1 konstansról, illetve az $\frac{1}{4}$ együtthatóról megfeledkezhetünk, hiszen a szélsőérték-hely szempontjából irrelevánsak. A t maximalizálása tehát egyenértékű lesz a $\frac{d^2+3}{d}=d+\frac{3}{d}$ minimalizálásával. A számtani-mértani közép egyenlőtlensége szerint $d+\frac{3}{d}\geqq 2\cdot\sqrt{3}$, egyenlőség pedig csak $d=\frac{3}{d}=\sqrt{3}$ esetén lehetséges. Innen visszahelyettesítve adódik, hogy $a=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, illetve $t=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. *(A befejezés innen azonos az* a) *változatéval.)*



Hátra van még annak a vizsgálata, hogy valóban csak ez az egy optimális elrendezés lehetséges (szimmetria erejéig). Tegyük fel, hogy a D és E pontok valamely elrendezése mellett megvalósul a fentebb kiszámított maximális $t_{\min}$ érték. Jelöljük ezt ezen túl, mondjuk τ-val. Húzzunk egy-egy szakaszt az ABC háromszög belsejében AC-val, illetve BC-vel párhuzamosan úgy, hogy ha ezeken a szakaszokon veszünk fel egy D, illetve E pontot, akkor az ADC, illetve BCE háromszögek területe éppen τ lesz. Jelöljük az ezen két szakasz által lemetszett trapéz alakú tartományokat $TR1$-gyel, illetve $TR2$-vel. Jelöljük továbbá H-val azt a háromszög alakú tartományt ABC-n belül, melynek pontjai $TR1$-hez és $TR2$-höz sem tartoznak hozzá. Vegyük sorra a D és E pontok lehetséges elhelyezkedéseit ezen tartományokhoz képest.

1) Ha D és E valamelyike benne van $TR1$ vagy $TR2$ belsejében. Ekkor a megfelelő ADC vagy BCE háromszög területe τ-nál kisebb, tehát nem lehet optimális az elrendezés.

Ezért a továbbiakban feltehető, hogy D és E is H belsejében, vagy annak határán van.

2) Ha D és E is H belsejében van. Ekkor ADC és BCE területe is nagyobb, mint τ. Ha optimális ez az elrendezés, akkor a többi három háromszög területe is legalább τ. Mozgassuk el egy kicsit (mondjuk) a D pontot a DE szakasz meghosszabbításán úgy, hogy DE hossza nőjön, de D továbbra is H belsejében legyen. ADC és BCE területe továbbra is nagyobb τ-nál, de most már a többi három háromszög területe is határozottan nagyobb τ-nál. Ez viszont ellentmond annak, hogy τ a lehetséges optimum.

3) Ha D és E egyike (mondjuk D) a H tartomány határán van, míg E a H belsejében. Most E-t mozgassuk el a DE meghosszabbításán úgy, hogy még a H belsejében maradjon, majd D-t is mozgassuk el azonos irányban, de csak fele olyan távolságra. ADC és BCE területe így határozottan nagyobb lesz τ-nál (hiszen most már D és E is a H belsejében van), a többi három háromszög területe pedig nőtt (hiszen DE hosszabb lett), így most már ezek területe is határozottan nagyobb τ-nál. Ez ellentmondás.

4) Ha D is és E is a H határán van, és DE nem párhuzamos AB-vel. Ekkor a megoldás elején vázolt 2. lépéshez hasonlóan járunk el. Azaz az AB-től távolabbi pontot (mondjuk az E-t) a H határán mozgatjuk AB felé egy kicsit úgy, hogy E még mindig távolabb legyen AB-től, mint D. Mint ahogy azt korábban már beláttuk, mindeközben a DEC és az AED háromszögek területe nő, továbbá a BED területe csökken ugyan, de továbbra is biztosan nagyobb AED-nél. Ezek szerint, ha a kiinduló konfiguráció optimális volt, akkor az új elrendezésben az utóbb említett három háromszög mindegyikének területe határozottan nagyobb, mint τ. Ha most D-t is és E-t is egymás felé mozgatjuk a H tartomány belsejében, de csak annyira, hogy a DEC, az AED, valamint a BED háromszögek területe továbbra is τ-nál nagyobb maradjon, akkor eljuthatunk egy olyan elrendezéshez, amelynél mind az öt vizsgált háromszög τ-nál nagyobb területű. Ez újra ellentmondás.

A továbbiakban tehát D és E a H határán van úgy, hogy DE párhuzamos AB-vel.

5) Tegyük fel, hogy DE a középvonalon, vagy felette helyezkedik el. Ha DE a középvonalon van, mégpedig úgy, hogy a D és E pontok az oldalakhoz közelebbi negyedelő-pontokban vannak, akkor mind az öt háromszög területe $1/8$. Ez rosszabb, mint a fentebb kiszámított optimum ($\tau = 0{,}1339\ldots$). D-t és E-t tehát egymás felé kell közelíteni ahhoz, hogy a H tartomány határára kerüljenek. Ekkor ADC és BCE területe éppen τ lesz, a többi három háromszög területe viszont csökken. Mivel így DEC területe is $1/8$-nál kisebb lesz, ezért ez nem lehet optimális elrendezés. Ha a DE szakaszt közelítjük C felé (D-t és C-t a H határán tartva), akkor DEC területe tovább csökken, hiszen a DE és a hozzá tartozó magasság is együtt csökken. Továbbra sem állhat elő tehát optimális elrendezés.

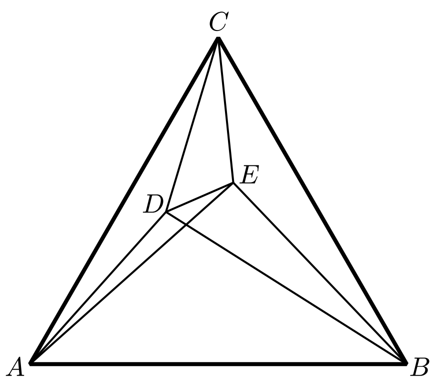
6) Marad az az eset, amikor a középvonalnál lejjebb van a DE szakasz. Ezeknek az eseteknek a teljes diszkusszióját tartalmazza már a bizonyítás korábbi része, amelyből kiderül, hogy ezen elrendezések közül kizárólag egynél adódik optimális $t_{\min}$.

Ezzel befejeztük a vizsgálatot. ■

Megjegyzés: Erős a kísértés arra, hogy azt sejtsük: a $t_{\min}$ maximális értékét akkor veszi fel, ha a D és az E pontok a háromszög középvonalán, mégpedig annak, az oldalakhoz közelebbi negyedelő-pontjaiban vannak. Ez bizonyos értelemben a lehető legszabályosabb elrendezés. Ekkor mind az 5 vizsgálandó háromszög területe egyenlő, éspedig $1/8$. Könnyen látható, hogy a D és E pontok bármelyikét elmozdítva az öt háromszög valamelyikének a területe csökkenni fog. Ez alátámasztani látszik a sejtésünket. Igen ám, de ha a D és E pontokat (a megfelelő módon) együtt mozgatjuk az AB oldal felé, akkor a vizsgált öt háromszög területösszege növelhető, akár úgy is, hogy mindegyik területe növekedjen. A fenti gondolatmenet igazolja, hogy ez valóban megvalósítható, tehát a sejtésünk hamisnak bizonyult.

Megoldás.

Legyenek a háromszög pontjai A, B és C. A háromszög belsejében lévő két pont pedig D és E. Ebből az 5 pontból 10-féleképpen választhatunk ki 3-at. Ennyi háromszöggel kell tehát foglalkoznunk. A két belső pont, D és E meghatároz egy egyenest, mely a háromszögnek pontosan kettő oldalát metszi. Feltehetjük, hogy ezek BC és CA. Az ABC háromszög te-



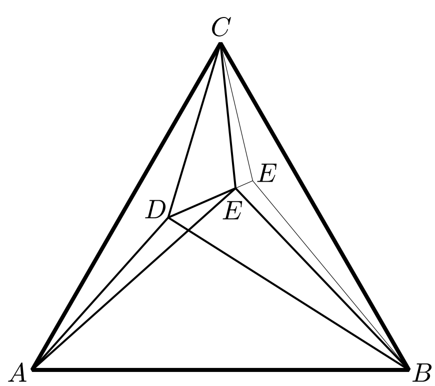
rülete biztosan nem lehet $t_{\min}$. Az AEC és a BCD háromszögeknél is van kisebb területű (nevezetesen az ADC, illetve a BCE háromszögek). Most belátjuk, hogy ABE és ABD területe sem lehet $t_{\min}$. Amelyik a kettő közül nagyobb területű, az biztosan nem lehet. Nézzük most azt, amelyik kisebb (illetve ha egyenlő területűek, akkor az egyiküket). Szimmetria-okok miatt feltehető, hogy ez mondjuk az ABD (alapábra). Az AED háromszög biztosan kisebb nála, hiszen a közös AD oldalhoz tartozó magassága kisebb (csakúgy, mint minden, a háromszög belsejében lévő ponté.)

Elég tehát most már csak 5 háromszögre koncentrálni. Ezek közül három tartalmazza a DE szakaszt, míg a másik kettő a BCE és az ADC háromszögek.

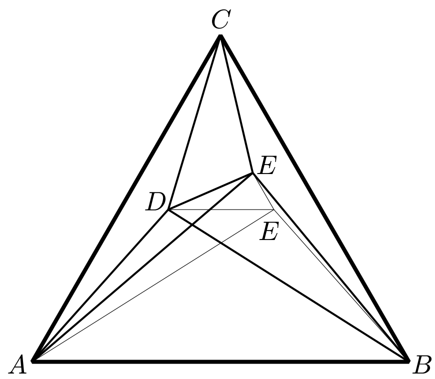
Azt sejtjük, hogy a $t_{\min}$ maximális értékét akkor vesz fel, ha a D és az E pontok a háromszög középvonalán, mégpedig annak, az oldalakhoz közelebbi negyedelő-pontjaiban vannak. Könnyen látható, hogy ekkor mind az 5 vizsgálandó háromszög területe $1/8$.

A sejtés bizonyításához induljunk ki a D és az E pontoknak egy tetszőleges elrendezéséből. Ezek után több lépésben megváltoztatjuk ezen pontok helyzetét (van, hogy csak az egyiküket, míg máskor mindkettőét egyszerre). Mindezt úgy hajtjuk végre, hogy ügyelünk arra, hogy minden lépésben úgy változzon meg a vizsgált 5 háromszög területe, hogy a minimális terület ne csökkenhessen.

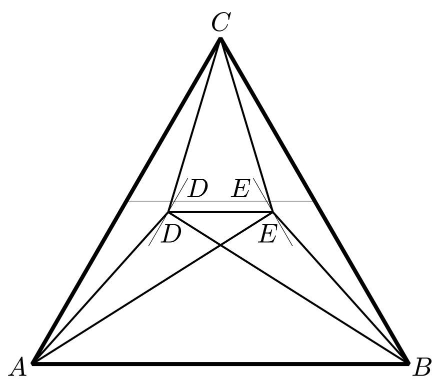
A következő ábrák ezeknek a változtatásoknak a menetét szemléltetik.



Az 1. lépésre akkor van szükség, ha az ADC és a BCE háromszögek területe nem egyenlő. (Ha egyenlők, akkor ugorhatunk a 2. lépésre.) Ha a BCE nagyobb, akkor az E, ha pedig az ADC nagyobb, akkor a D ponttal végezzük el a következőket. Ezt a pontot (legyen mondjuk az E) a DE szakasz meghosszabbításán eltoljuk addig, hogy az ADC és a BCE háromszögek területe egyenlő legyen. Mindeközben az ADC területe nem változik, a DEC, a DEA és a DEB területe nő, hiszen a közös DE alapjuk hosszabbá válik, a BCE pedig csak addig csökken, amíg el nem éri az ADC nagyságát.



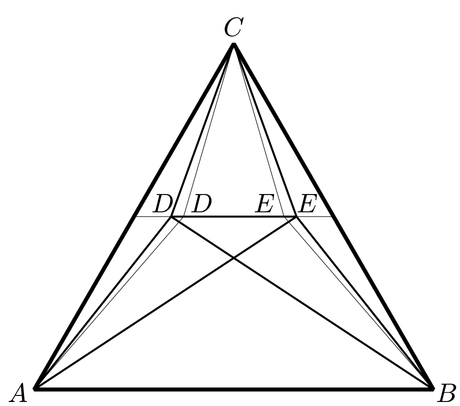
A 2. lépésben E-t eltoljuk a BC-vel párhuzamosan addig, amíg a DE szakasz párhuzamos lesz AB-vel. (Ha máris párhuzamos vele, akkor tovább haladhatunk a 3. lépéssel.) Az ADC és a BCE területe nem változik mindeközben. A DEC és az AED háromszögek területe nő, hiszen az E pont olyan irányban mozog, mely távolodóban van a mozgás egyenesének AD-vel, illetve DC-vel való metszéspontjától. A BED területe csökken (az E pont az eredeti BED háromszög belsejében mozog), de csak addig, amíg el nem éri az AED területét.

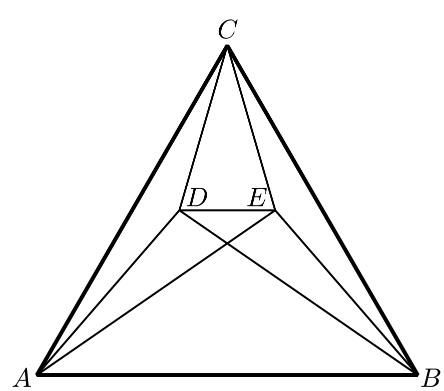


A 3. lépésben a D és az E pontokat szinkronban mozgatjuk, úgy hogy a DE szakasz párhuzamos maradjon AB-vel, miközben D és E az AC-vel, illetve a BC-vel párhuzamosan mozog. Addig mozgatjuk őket, amíg a DE szakasz az ABC háromszög középvonalára nem illeszkedik. Mindeközben ADC és BCE területe nem változik. A másik 3 háromszög területe folyamatosan változik, mindenesetre az az egy (vagy kettő), amely területe csökken, csak addig tud csökkenni, amíg területe el nem éri a maradék kettő (vagy egy) háromszög területét.

Ezek után az AED, a BED és a DEC háromszögek területe egyenlővé válik.

A 4. lépésben végül a D és E pontokat a középvonalon szinkronban mozgatjuk addig, amíg a megfelelő negyedelő-pontokat el nem érik. Ennek során minden háromszög területe folyamatosan változik, de mivel már csak két fajta terület fordul elő, ezért ez a változás azt jelenti, hogy valamely háromszögek (2, vagy 3 db) területe nő, míg a többi (3, vagy 2 db) területe csökken, ez utóbbi területcsökkenés csak addig folytatódik, amíg minden terület egyenlő nem lesz.





Végül tehát eljutottunk a megsejtett konfigurációhoz úgy, hogy közben $t_{\min}$ értékét nem csökkentettük. Ez pedig azt jelenti, hogy ez az elrendezés valóban optimális, hiszen az erre jellemző $1/8$-nál nagyobb $t_{\min}$ érték egyetlen más elrendezésnél sem léphet fel.