Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Adott kerületű háromszögek közül vizsgáljuk azt, amelyiknél a háromszög beírt körön kívüli részének területe maximális. Mekkora a beírt kör sugara?

Megoldás. Jelölje ϱ a beírt kör sugarát és 2s a háromszög kerületét! Ekkor a háromszög beírt körön kívüli részének területe:

$$\varrho s-\varrho^2\pi=-\pi\left[\varrho^2-\frac{s}{\pi}\varrho\right]=-\pi\left[\left(\varrho-\frac{s}{2\pi}\right)^2-\frac{s^2}{4\pi^2}\right]=-\pi\left(\varrho-\frac{s}{2\pi}\right)^2+\frac{s^2}{4\pi}\leqq\frac{s^2}{4\pi}.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\varrho=\dfrac{s}{2\pi}$. Legyenek a háromszög oldalai:

$$a=(2-d)\cdot\frac{s}{3},\quad b=\frac{2s}{3},\quad c=(2+d)\cdot\frac{s}{3},\quad \text{ahol:}\quad d=\sqrt{1-\frac{27}{4\pi^2}}\approx 0{,}562.$$

Ekkor a háromszög kerülete $2s$ és

$$\varrho^2=\frac{t^2}{s^2}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}=\frac{s^2\left(1-d^2\right)}{27}=\frac{s^2}{4\pi^2}.$$

Tehát a beírt kör sugara: $\varrho=\dfrac{s}{2\pi}$.

2. Legyenek a és b páratlan pozitív egész számok, melyek relatív prímek, azaz $(a,b)=1$. Bizonyítsa be, hogy az $A=a^{2^{2008}}-b^{2^{2008}}$ számnak legalább 2008 db különböző prímosztója van.

Megoldás. Alakítsuk szorzattá a fenti kifejezést.

$$A=(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^{2^2}+b^{2^2}\right)\cdot\left(a^{2^3}+b^{2^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a^{2^{2007}}+b^{2^{2007}}\right)\cdot(a-b).$$

Egy páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, ugyanez igaz páratlan szám tetszőleges páros hatványára is. Két ilyen hatvány összege tehát 4-gyel osztva 2-t ad maradékul, azaz nem osztható 4-gyel. Ezért az iménti szorzat középső 2007 db tényezőjének mindegyike rendelkezik páratlan prímosztóval. Tegyük fel, hogy ezek közül valamely két tényezőnek van közös páratlan prímosztója. Legyen tehát p páratlan prím, és $p\mid a^{2^k}+b^{2^k}$, valamint $p \mid a^{2^l} + b^{2^l}$ valamely $1 \leqq k < l \leqq 2007$ számokra. Az első oszthatóságból közvetlenül adódik, hogy $p \mid a^{2^{k+1}} - b^{2^{k+1}}$; $p \mid a^{2^{k+2}} - b^{2^{k+2}}$; $\dots$ végül $p \mid a^{2^l} - b^{2^l}$. Innen

$$p \mid a^{2^l} + b^{2^l} + a^{2^l} - b^{2^l},$$

tehát $p \mid 2 \cdot a^{2^l}$, amiből $p \mid a$, tehát $p \mid b^{2^l}$, így $p \mid b$. Ezzel ellentmondásra jutottunk, hiszen $(a, b) = 1$, ezért nem lehet közös prímosztójuk. Mivel 2007 db tényező közül semelyik kettőnek nem lehet közös páratlan prímosztója, ezért a skatulyaelv miatt legalább 2007 db különböző páratlan prímosztójuk kell legyen összesen. Ezen kívül minden tényező osztható 2-vel, így összesen legalább 2008 különböző prímosztóhoz jutunk.

3. Nevezzük egy konvex n-szög három szomszédos csúcsa által meghatározott (n db) háromszöget sarokháromszögnek. Adjunk példát olyan konvex 2008-szögre, melyben a csúcsok által meghatározott összes háromszög közül a 2008 db legkisebb területű háromszögből legfeljebb 63 db sarokháromszög van.

1. megoldás. Rögzítsünk egy derékszögű koordinátarendszert. Legyen a 2008-szögünk első 2007 db csúcsa az $\left(n, n^2\right)$ koordinátájú pontokkal meghatározva. ($n = 0 \dots 2006$), a 2008-ik csúcs koordinátái pedig legyenek $\left(0, \dfrac{1}{1004}\right)$. Az így kapott sokszög valóban konvex, hiszen az első 2007 csúcs egy konvex parabolaíven helyezkedik el. A parabolaíven lévő csúcsok által meghatározott minden egyes sarokháromszög területe 1 egységnyi. Ez könnyen belátható a megfelelő trapézok területéből. Tekintsük ugyanis azt a háromszöget, melynek csúcsai: $\left(n, n^2\right)$; $\left(n+1, (n+1)^2\right)$; $\left(n+2, (n+2)^2\right)$. Ennek a területe

$$\left(n^2 + (n+2)^2\right) - \frac{n^2 + (n+1)^2}{2} - \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2}{2} = 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a vizsgált 2008-szögnek 2005 db sarokháromszöge 1 területű. Vizsgáljuk most azokat a háromszögeket, melyeknek az alapja a $(0, 0)$ és a $\left(0, \dfrac{1}{1004}\right)$ csúcsok által van meghatározva. 2006 db ilyen háromszög van (és közülük csak kettő sarokháromszög), a legnagyobbnak a magassága 2006. Ezért mindegyiknek a területe kisebb vagy egyenlő, mint

$$\left(2006 \cdot \frac{1}{1004}\right) \Big/ 2 = \frac{2006}{2008} < 1.$$

Egy sarokháromszöget nem vizsgáltunk eddig, nevezetesen a

$$\left(0, \frac{1}{1004}\right); \qquad \left(2005, 2005^2\right); \qquad \left(2006, 2006^2\right)$$

csúcsokkal rendelkezőt. Ennek a területe is kiszámolható, kb. 201 1015,000 498…-nek adódik, tehát jócskán nagyobb 1-nél. A vizsgált háromszögek közül van tehát 2004 db 1-nél kisebb területű nem-sarokháromszögünk, 2 db 1-nél kisebb területű sarokháromszögünk, végül 2005 db 1 területű, és 1 db 1-nél nagyobb területű sarokháromszög. A legkisebb 2008 db háromszög közül tehát legfeljebb 4 db lesz sarokháromszög.

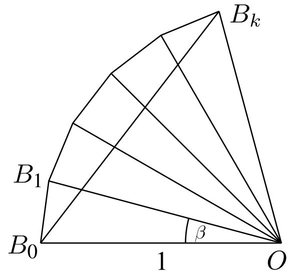
2. megoldás. Jelöljük a 2008-szög oldalait rendre $a_0, \ldots, a_{2007}$-tel, a szögeit $\alpha_0, \ldots, \alpha_{2007}$-tel ($\alpha_0$ jelöli az a_0 és a_1 által bezárt szöget), a megfelelő szögekhez tartozó csúcsokat pedig $A_0, \ldots, A_{2007}$-tel. Legyen a 2008-szög első 2006 db szöge egyenlő, mégpedig

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{2006} = 180 \cdot \left(\frac{2005}{2006}\right) \text{ fok.}$$

Mivel a 2008-szög szögeinek összege $2006 \cdot 180$ fok, ezért $\alpha_{2007} + \alpha_0 = 180^\circ$, tehát konvex sokszögről van szó, hiszen minden szöge kisebb 180°-nál. Az oldalak legyenek $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $\ldots$; $a_k = k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ minden $k \leqq 2007$-re. Legyen az $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ sarokháromszög $\triangle_i$, területe T_i. Világos, hogy $T_1 < T_2 < \ldots < T_{2006}$. ($\alpha_i = \alpha_{i+1}$, míg $a_{i+1} > a_i$ és $a_{i+2} > a_{i+1}$, azaz két szomszédos sarokháromszög egy-egy szöge azonos, míg a hozzá tartozó mindkét oldal nagyobb.) A következőkben megmutatjuk, hogy:

Állítás: minden $\triangle_i$-hez ($i = 3, \ldots, 2006$) megadható $i - 2$ db olyan háromszög, mely nem sarokháromszög, és területe kisebb T_i-nél. Mindez pedig úgy teljesíthető, hogy a különböző $\triangle_i$-khez ily módon megadott háromszögek mind különbözők legyenek. (Ha ezt sikerül megvalósítani, akkor készen is vagyunk, hiszen ily módon a $\triangle_1; \triangle_2; \ldots; \triangle_{64}$ háromszögekhez – melyek a legkisebb sarokháromszögek – hozzárendeltünk rendre $0; 0; 1; 2; \ldots; 62$ db nem-sarokháromszöget, melyek mindegyike különböző és kisebb területű T_{64}-nél. Az így kapott $\sum_{i=1}^{62} i = 1953$ db nem-sarokháromszög a legkisebb 63 db sarokháromszöggel együtt összesen 2016 db háromszöget ad, melyeknek mind kisebb a területe T_j-nél minden $j \geqq 64$-re.)

Az állítás bizonyítása: Legyen $3 \leqq i \leqq 2006$. Megfelelő háromszögek lesznek a következők: $A_kA_{i-1}A_i$, ahol $k = 0, \ldots, i-3$. Nézzük először az $A_0A_{i-1}A_i$ háromszöget. Ha erre a háromszögre belátjuk, hogy területe kisebb T_i-nél, akkor készen vagyunk, mert – mint az a gondolatmenet során majd kiderül – a többi háromszög $A_{i-1}A_i$-hez tartozó magassága kisebb. Tekintsük tehát az $A_0A_{i-1}A_i$ háromszöget. Próbáljuk megbecsülni ennek a háromszögnek az $A_{i-1}A_i$ oldalhoz tartozó magasságát. Ebből a célból először az $A_{i-2}A_{i-1}$; $A_{i-3}A_{i-2}$; $\ldots$; A_0A_1 oldalaknak az $A_{i-1}A_i$-re merőleges vetületét becsüljük meg. Legyen $\beta = 180 - \alpha$, azaz $\beta = 180 \cdot \left(\frac{1}{2006}\right)$. A 2008-szög fentebb vázolt konstrukciójából következik, hogy az imént említett oldalak rendre β; $2 \cdot \beta$; $\ldots$; $(i-1) \cdot \beta$ szöget zárnak be az $A_{i-1}A_i$ oldallal, hosszaik pedig rendre $(i-1)!$; $(i-2)!$; $\ldots$; 1. Jelöljük az $A_{i-2}A_{i-1}$ oldallal párhuzamos egységszakasz $A_{i-1}A_i$-re merőleges vetületének a hosszát m-mel. Világos, hogy az $A_{i-2}A_{i-1}$ vetülete $m \cdot (i-1)!$. Azt állítjuk, hogy a további oldalak vetületei rendre felülről becsülhetők a $2 \cdot m \cdot (i-2)!$; $3 \cdot m \cdot (i-3)!$; $\ldots$; $k \cdot m \cdot (i-k)!$; $\ldots$; $(i-2) \cdot m \cdot 2!$; $(i-1) \cdot m \cdot 1$ értékekkel. Ez közvetlenül adódik abból, hogy az $A_{i-1}A_i$-vel $k \cdot \beta$ szöget bezáró egységszakasz merőleges vetülete $k \cdot m$-nél kisebb.



(A mellékelt *ábrán* $T_{OB_0B_k} < k \cdot T_{OB_0B_1} = k \cdot 1 \cdot \dfrac{m}{2}$. Ezért OB_0B_k magassága is kisebb, mint $k \cdot m$.)
Mivel A_iA_{i+1}-nek az $A_{i-1}A_i$-re merőleges vetülete éppen

$$a_{i+1} \cdot m = m \cdot (i+1)!\,,$$

ezért már csak azt kell belátnunk, hogy

$$(i-1)! + 2 \cdot (i-2)! + 3 \cdot (i-3)! + \ldots + (i-2) \cdot 2! + (i-1) \cdot 1 < (i+1)!\,.$$

Ehhez felhasználjuk, hogy $n! > (n-1) \cdot (n-1)! > (n-1)! + (n-2)! + \ldots + 1$.
Mivel

$$(i-1)! + 2 \cdot (i-2)! + 3 \cdot (i-3)! + \ldots + (i-2) \cdot 2! + (i-1) \cdot 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} k! + \sum_{k=1}^{i-2} k! + \ldots + \sum_{k=1}^{2} k! + 1!,$$

ezért

$$(i-1)! + 2 \cdot (i-2)! + 3 \cdot (i-3)! + \ldots + (i-2) \cdot 2! + (i-1) \cdot 1 <$$
$$< i! + (i-1)! + \ldots + 2! < (i+1)!\,,$$

ahogy azt állítottuk. Ezzel beláttuk, hogy az $A_0A_{i-1}A_i$ háromszög területe kisebb T_i-nél. Függőben maradt még annak a bizonyítása, hogy a többi $A_kA_{i-1}A_i$ $(k = 1, \ldots, i-3)$ háromszög $A_{i-1}A_i$-hez tartozó magassága kisebb, mint az $A_0A_{i-1}A_i$ háromszög magassága. Ez közvetlenül látszik a mellékelt ábrából, hiszen $k \cdot \beta \leqq 180^\circ$ minden $k \leqq 2006$-ra, ezért a megfelelő vetületek is azonos irányba mutatnak, tehát a 2008-szög vizsgált csúcsai – az index csökkenésével együtt – valóban egyre távolabb kerülnek az $A_{i-1}A_i$ oldaltól minden $3 \leqq i \leqq 2006$ esetén. $\square$