Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Tetszőleges számú 2 egység és 5 egység oldalú négyzetlapunk van. Ki lehet-e közülük 2009 darabot választani úgy, hogy belőlük hézagmentesen és átfedés nélkül négyzetet lehessen kirakni?

Megoldás. Tegyük fel, hogy x darab 5×5-ös és $2009 - x$ darab 2×2-es lapból ki lehet rakni egy y oldalú négyzetet, ahol $x \in \mathbb{N}$, $x \leqq 2009$, $y \in \mathbb{Z}^+$. 1 pont

Az y oldalú négyzet területére igaz, hogy

$$25\,x + (2009 - x) \cdot 4 = y^2,$$

azaz $$21\,x + 4 \cdot 2009 = y^2.$$ 2 pont

A bal oldal 3-mal osztva 2 maradékot ad. 1 pont

A jobb oldalon y^2 3-mal osztva viszont nem adhat 2 maradékot, hiszen egy négyzetszám 3-as maradéka 0 vagy 1, mert

$$(3n)^2 = 9n^2 \quad \text{és} \quad (3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3n(3n \pm 2) + 1.$$ 2 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy nem lehet a 2009 darab négyzetből négyzetet kirakni. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Legyenek a és b 2-nél nagyobb valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$9a + 8b - 6ab < 10.$$

1. megoldás. Az egyenlőtlenség alapján $0 < 6ab - 9a - 8b + 10$, azaz

$$0 < (ab - 2a - 2b + 4) + (2ab - 4a) + (3ab - 6b - 3a + 6).$$ 1 pont

Mivel $ab - 2a - 2b + 4 = (a-2)(b-2)$, továbbá 1 pont

$$2ab - 4a = 2a(b-2) \quad \text{és}$$ 1 pont

$$3ab - 6b - 3a + 2 = 3(a-2)(b-1), \quad \text{ezért}$$ 1 pont

$$0 < (a-2)(b-2) + 2a(b-2) + 3(a-2)(b-1) \quad \text{adódik.}$$ 1 pont

A kapott összeg mindegyik tagja pozitív a feltételek alapján, ezért az eredeti egyenlőtlenség valóban teljesül. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. A $9a + 8b - 6ab < 10$ egyenlőtlenség alapján $3a(3 - 2b) < 10 - 8b$.

Mivel $b > 2$, így $3 - 2b < 0$, ezért

$$a > \frac{2(4b-5)}{3(2b-3)}.$$ 2 pont

Elegendő azt igazolni, hogy $2 > \frac{2(4b-5)}{3(2b-3)}$, hiszen $a > 2$. 2 pont

Mivel $2b - 3 > 0$, ezért ekvivalens átalakításokkal $12b - 18 > 8b - 10$, azaz $b > 2$ adódik. 1 pont

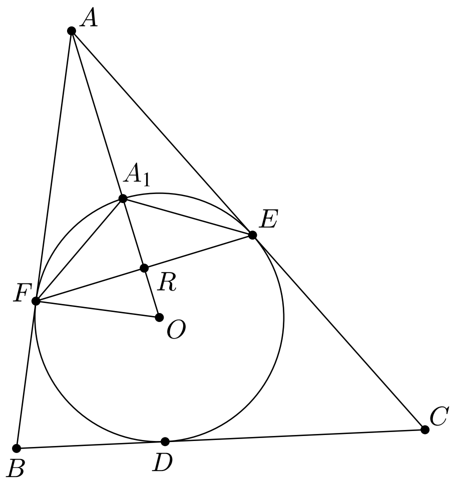
Ez pedig a feltételek alapján minden esetben teljesül. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre az F, D, E pontokban érinti. Az AFE, BDF és CED háromszögek beírt körének középpontja rendre A_1, B_1 és C_1.

Bizonyítsuk be, hogy A_1, B_1 és C_1 rajta vannak az ABC beírt körén!

Megoldás. Jelölje a beírt kör középpontját O, az FE szakasz felezőpontját R, a háromszög belső szögeit pedig α, β, γ, a szokásos módon.



Elegendő az A_1 pontra bizonyítani, a másik két pont esetében hasonlóan megy az indoklás. Azt fogjuk megmutatni, hogy $OA_1 = OF$. Mivel OF a beírt kör sugara, ebből következik a bizonyítandó állítás. 1 pont

Az AFE háromszög egyenlő szárú, mert AF és AE közös pontból húzott érintőszakaszok. 1 pont

Innen $AFE\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. 1 pont

A beírt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja, ezért egyrészt A_1 rajta van az ABC háromszög A-ból induló, és a beírt kör O középpontján átmenő belső szögfelezőjén, másrészt $A_1FA\sphericalangle = 45° - \frac{\alpha}{4}$. 1 pont

Innen $A_1FO\sphericalangle = 90° - A_1FA\sphericalangle = 45° + \frac{\alpha}{4}$. 1 pont

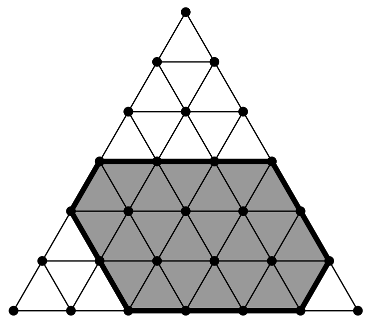
Az FEA_1 háromszög is egyenlő szárú, továbbá AO az FE felezőmerőlegese, ebből

$$FA_1O\sphericalangle = FA_1R\sphericalangle = 90^\circ - A_1FE\sphericalangle = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}.$$ 1 pont

Beláttuk, hogy A_1FO egyenlő szárú, $OF = OA_1$, tehát A_1 valóban rajta van a beírt körön. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy szabályos háromszög oldalának hossza legyen kettőnél nagyobb természetes szám. A szabályos háromszög – az ábrán látható módon – felbontható egységoldalú szabályos háromszögekre. Az eredeti háromszög csúcsainál egy-egy egész oldalhosszúságú szabályos háromszöget levágva olyan hatszöget kapunk, amelynek oldalai egész hosszúságúak, szögei pedig egyenlők. Nevezzük egy ilyen hatszög *méretének* az őt alkotó egységoldalú szabályos háromszögek számát. (Az ábrán látható hatszög mérete ezek szerint 22.)



a) Hány különböző – nem egybevágó – hatszög készíthető a fenti módszerrel, ha az eredeti háromszög oldalainak hossza 6 egység?

b) Mekkora az a legkisebb egész oldalhosszúságú szabályos háromszög, amiből kivágható 2009 *méretű* hatszög?

Megoldás. Mindkét részfeladat megoldásához hasznos a következő észrevétel:

Ha az eredeti háromszög oldalhossza n, akkor a felosztás során n^2 kis háromszög keletkezik. Ennek igazolásához azt kell látni, hogy (az ábrán fentről lefelé számolva) „soronként” $1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ kis háromszög keletkezik, erről az összegről pedig ismert (és teljes indukcióval könnyen igazolható), hogy éppen n^2. (Akkor is jár pont, ha a versenyző csak megfogalmazza, de nem bizonyítja, hogy a kis háromszögek száma n^2.) 1 pont

A másik fontos észrevétel a következő: a hatszög egyértelműen meghatározható a levágott szabályos háromszögek oldalhosszával. Jelöljük ezeket a, b, c-vel. (Az ábrán 3, 2 és 1.) Vegyük észre, hogy a, b és c sorrendje nem számít, tükrözéssel és forgatással mind a hat lehetséges sorrend megkapható, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $a \leqq b \leqq c$. 1 pont

Ahhoz, hogy tényleg hatszöget kapjunk a vágások után, a következő feltételeknek kell teljesülniük:

$$0 < a, \quad 0 < b, \quad 0 < c, \quad a + b < 6, \quad a + c < 6, \quad b + c < 6.$$

(a) Felsoroljuk a, b és c lehetséges értékeit, és megmutatjuk, hogy az így kapott hatszögek valóban különböznek (nincs köztük egybevágó).

a	b	c	méret $= 36 - a^2 - b^2 - c^2$
1	1	1	33
1	1	2	30
1	1	3	25
1	1	4	18
1	2	2	27
1	2	3	22
2	2	2	24
2	2	3	19

Mivel minden esetben más a hatszög mérete, semelyik kettő nem lehet egybevágó, tehát összesen 8 különböző hatszög készíthető. 2 pont

(b) Ha n hosszú a nagy háromszög oldala, a levágottaké pedig a, b és c, akkor a hatszög mérete (ahogy már korábban is láttuk) $n^2 - a^2 - b^2 - c^2$, ennek kell 2009-nek lennie. Innen $n \geqq 45$, hiszen $44^2 = 1936 < 2009$. 1 pont

Ha $n = 45$, akkor az $a^2 + b^2 + c^2 = 16$ egyenletet kell megoldanunk, hiszen $45^2 = 2025 = 2009 + 16$. Ennek az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számhármasok halmazán. 1 pont

Ha $n = 46$, akkor $46^2 - 1^2 - 5^2 - 9^2 = 2116 - 1 - 25 - 81 = 2009$ jó megoldást ad. Tehát a legkisebb háromszög oldalának hossza – amiből a 2009 méretű elkészíthető – 46 egység, és ebből 1, 5 és 9 oldalhosszúságú háromszögeket kell levágni. 1 pont

Összesen: 7 pont