Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy gazda az állatainak táplálásához a szomszédos gazdaságtól kétféle takarmány-keveréket vásárolhat. Az első fajta zsákonként 3000 Ft-ba kerül és ez 20 kg A komponenst és 10 kg B komponenst tartalmaz. A második fajta zsákonként 5000 Ft-ba kerül és ebben 10 kg A, 25 kg B és 5 kg C komponens van. A gazda rájött, hogy az állatok egészséges fejlődéséhez naponta legalább 90 kg A, 105 kg B és 5 kg C komponensre van szükség. Mennyit vásároljon az egyes takarmány-keverékekből naponként, hogy a legolcsóbban tudjon egészséges állatokat nevelni?

Megoldás. Ha az elsőfajta keverékből x, a második fajtából y zsákkal vesz a gazda, abból az állatok $20x + 10y$ kg A komponenshez jutnak, amiből legalább 90 kg szükséges:

$$20x + 10y \geqq 90.$$ 2 pont

Hasonlóan a másik két komponens esetén a

$$10x + 25y \geqq 105$$
$$5y \geqq 5$$

feltételeket kapjuk. 1 pont

E 3 feltétel, valamint az, hogy $x \geqq 0$; $y \geqq 0$ a koordinátasíkon kijelöl egy olyan tartományt, amelyet a $P(0;9)$, a $Q(3;3)$ és az $R(8;1)$ pontok által meghatározott PQ és QR szakaszok, valamint az y tengely P-től számított pozitív irányú része, és az x tengellyel párhuzamos, R-hez csatlakozó félegyenes képeznek. 1 pont

Keresendő az a legkisebb k konstans, amely mellett a takarmány napi

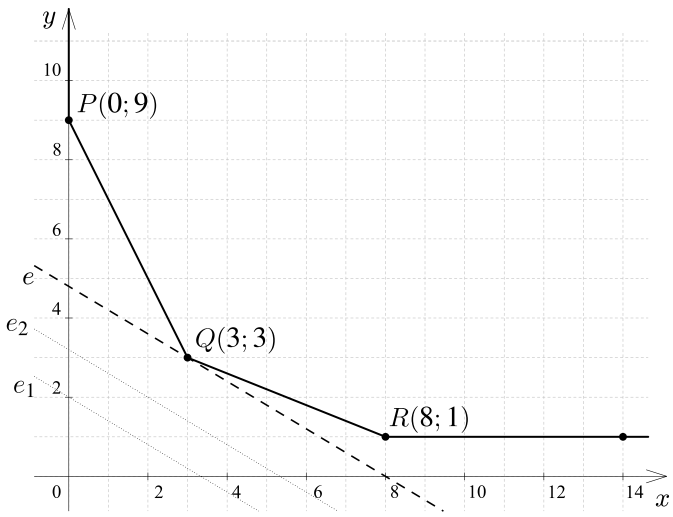
$$3000x + 5000y = k$$

költségét kifejező függvény képének van a mi tartományunkkal közös pontja.

Ezek az egyenesek párhuzamosak egymással, meredekségük $-0{,}6$. 1 pont

$k = 24\,000$ esetén tartományunkkal egyetlen közös pont van, mégpedig Q. Könnyen ellenőrizhető, hogy $k > 24\,000$ esetén a tartománynak több pontja is illeszkedik az egyenesre, $k < 24\,000$ esetén pedig egyetlen pontja sem illeszkedik. 1 pont

Tehát a gazdának a két fajtából naponta 3-3 zsákkal kell vásárolnia. 1 pont



Összesen: 7 pont

2. Melyek azok a pozitív egészekből álló különböző $(x;y;z;u)$ számnégyesek, amelyek kielégítik az

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=u$$

egyenletet?

Megoldás. Először belátjuk, hogy $x \leqq y \leqq z$ esetén $\frac{x}{x+1} \leqq \frac{y}{y+1} \leqq \frac{z}{z+1}$.

Állításunk helyessége az $1-\frac{1}{x+1} \leqq 1-\frac{1}{y+1} \leqq 1-\frac{1}{z+1}$ alakról közvetlenül leolvasható.

Mivel $\frac{1}{2} \leqq \frac{x}{x+1}$ és $\frac{z}{z+1}<1$, ezért $\frac{3}{2} \leqq \frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}<3$. 1 pont

Így tehát $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=u$ értéke csak 2 lehet.

Ekkor pedig $\frac{x}{x+1} \leqq \frac{2}{3}$, hiszen $3 \cdot \frac{2}{3}$ éppen 2, tehát $x \leqq 2$.

1. eset: $x=1$.

Esetünkben $\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=\frac{3}{2}$, ahonnan $\frac{y}{y+1} \leqq \frac{3}{4}$, így $y \leqq 3$.

Ha $y=1$, akkor $\frac{z}{z+1}=1$, így nincs megoldás. 1 pont

Ha $y=2$, akkor $\frac{z}{z+1}=\frac{5}{6}$, tehát $z=5$. 1 pont

Ha $y=3$, akkor $\frac{z}{z+1}=\frac{3}{4}$, azaz $z=3$. 1 pont

2. eset: $x=2$.

Most $\frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} = \frac{4}{3}$. Mivel $\frac{2}{3} \leqq \frac{y}{y+1} \leqq \frac{2}{3}$, ezért csak $y = z = 2$ lehetséges. 1 pont

Az $x \leqq y \leqq z$ feltevésnek megfelelő megoldások így

x	1	1	2
y	2	3	2
z	5	3	2
u	2	2	2

Az alapmegoldások ellenőrizhetően megfelelők is. 1 pont

Az x, y, z változók sorrendjét is figyelembe véve az összes megfelelő számnégyes száma (oszloponként összeszámolva) $6 + 3 + 1 = 10$. 1 pont

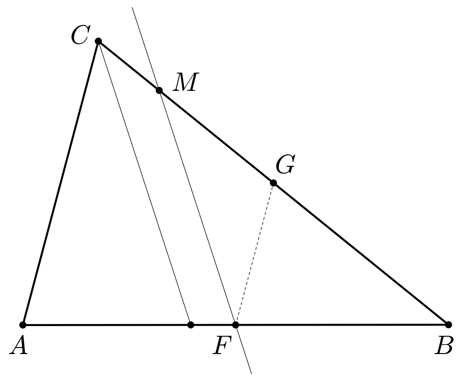
Összesen: 7 pont

3. Egy ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F. Megrajzoltuk F-en keresztül azt az e egyenest, ami felezi a háromszög kerületét. (Tehát mindkét e által meghatározott félsíkba a kerület fele esik.)

Bizonyítsuk be, hogy az e egyenes párhuzamos a C csúcsból induló belső szögfelezővel!

Megoldás. Ha $CA = CB$, vagyis a háromszög egyenlő szárú, akkor a kerületfelező egyenes egybeesik a C-ből induló szögfelezővel. 1 pont

A továbbiakban feltesszük, hogy $CA < CB$. Ekkor egyrészt a C-ből induló belső szögfelező a szemközti oldalt az AF szakasz belső pontjában metszi (például a szögfelező tétel miatt), másrészt az F-en áthaladó kerületfelező a BC oldalt belső pontjában metszi. 2 pont



Jelölje a BC oldal felezőpontját G, a kerületfelező és BC metszéspontját pedig M!

FG középvonal, ezért $FG \parallel AC$ és $FG = \frac{1}{2}AC$. 1 pont

Az FGB háromszög kerülete az ABC háromszög kerületének fele, ezért

$$FB + BG + GF = FB + BM = FB + BG + GM \Rightarrow GF = GM.$$ 1 pont

Az előbbi egyenlőség és a külsőszög tétel alapján $FMG\sphericalangle = \frac{1}{2}FGB\sphericalangle$, utóbbi szög viszont egyenlő az $ACB\sphericalangle$-gel, hiszen $FG \parallel AC$.

Tehát $FMG\sphericalangle = \frac{1}{2}ACB\sphericalangle$, ezért a kerületfelező valóban párhuzamos a belső szögfelezővel. 2 pont

Összesen: 7 pont