Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
I. forduló
kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy osztályban a gyerekek kettesével ülnek, és a padtársak közül pontosan az egyiküknél van minden matek órán matematika feladatgyűjtemény. Másik jellegzetessége az osztálynak, hogy bármely két tanuló esetén van egy harmadik társuk, aki pontosan akkor hozza el a matematika feladatgyűjteményét, ha a két tanulótársa is.

Egyik nap begurult a matek tanár, és azt mondta: „ebben az osztályban nincs olyan tanuló, aki minden nap matematika feladatgyűjteménnyel jönne a matek órára”.

Helyes volt-e ez a megjegyzése a tanárnak? (6 pont)

Megoldás. Legyen két padtárs A és A'! 2 pont

A második feltétel szerint van olyan B tanuló, aki pontosan akkor hozza el a matematika feladatgyűjteményét, ha A és A'. 1 pont

Mivel A-nak és A'-nek együtt sosincs feladatgyűjteménye, ezért B-nek sincs. 1 pont

Így B padtársa minden órára hoz magával feladatgyűjteményt, ezért a tanári megjegyzés hibás volt. 2 pont

Megjegyzés. A feladat feltételeinek megfelelő osztály létezik.

Pl. Legyen legalább három pad és minden padban az egyik tanulónak minden matek órán legyen feladatgyűjteménye és a másiknak soha.

Ezért a megjegyzésért legfeljebb 3 további pont adható.

2. Be lehet-e osztani az

$a)$ 1-től 2008-ig,

$b)$ 1-től 2009-ig

terjedő egész számokat két csoportba úgy, hogy a két csoportban a számok összege ugyanannyi legyen? (6 pont)

Megoldás. $a)$ A 2008 osztható 4-gyel, ezért a számok 1-től 2008-ig 4-es csoportokba oszthatók úgy, hogy 4 szomszédos szám alkosson egy csoportot. Tehát $\{1, 2, 3, 4\}$ az első csoport, $\{5, 6, 7, 8\}$ a második csoport, és így tovább, egy tetszőleges csoport $\{4k+1, 4k+2, 4k+3, 4k+4\}$ alakú. Minden csoportból a legkisebb és a legnagyobb elem összege ugyanakkora, mint a két középső elem összege:

$$(4k+1)+(4k+4)=(4k+2)+(4k+3).$$

Tehát, ha az „A” csoportba a 4-gyel osztva 1 vagy 0 maradékot adó számok kerülnek, a „B” csoportba pedig a 4-gyel osztva 2 vagy 3 maradékot adók, akkor az „A”, illetve a „B” csoportban a számok összege ugyanannyi lesz. Az $a)$ részben tehát **igen** a válasz.

Egy tetszőleges helyes konstrukcióért összesen adható pontszám: 4 pont

$b)$ 1-től 2009-ig a számok összege: $\dfrac{2009 \cdot 2010}{2} = 2009 \cdot 2005.$ 1 pont

Mivel ez a szám páratlan, a számokat **nem** lehet a feltétel szerint csoportokba osztani. 1 pont

Megjegyzés. A megoldásból kiolvasható, hogy ha n 4-gyel osztható, akkor az 1-től n-ig terjedő számok a feltétel szerint csoportokba oszthatók. Ha n 4-gyel osztva 1 vagy 2 maradékot ad, akkor nem.

Ha n 4-gyel osztva 3 maradékot ad, akkor pl. az a) részhez hasonló módon egyik csoportba a 4-gyel osztva 0 vagy 3, a másikba az 1 vagy 2 maradékot adó számokat sorolva a feltétel szerinti csoportosításhoz jutunk.

Ezért a megjegyzésért legfeljebb 3 további pont adható.

3. Egy 26 fős osztály legutóbbi matematika dolgozatairól a következőket tudjuk:
– 20 tanulónak közepesnél nem jobban,
– 14-nek közepesnél nem gyengébben sikerült.
– A közepesnél jobbak dolgozatainak átlaga 4,33;
– a közepesnél gyengébbek dolgozatainak átlaga 1,83;
– nem hiányzott senki a dolgozat írásakor.
(Az átlagok két tizedes kerekítéssel értendők.)

Mennyi az osztályátlag? (6 pont)

Megoldás. Tegyük fel, hogy f_i tanuló osztályzata i ($i = 1,2,3,4,5$). Ekkor:

$$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5 = 26 \qquad 1)$$

$$f_1+f_2+f_3 = 20 \qquad 2)$$

$$f_3+f_4+f_5 = 14 \qquad 3)$$

$$\frac{f_4 \cdot 4 + f_5 \cdot 5}{f_4+f_5} \approx 4{,}33 \qquad 4)$$

$$\frac{f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 2}{f_1+f_2} \approx 1{,}83 \qquad 5)$$

Az 1) és a $2)+3)$ összevetéséből azt kapjuk, hogy $f_3 = 8$. 1 pont

Így a 2)-ből $f_1+f_2 = 12$, amit az 5)-tel összevetve és felhasználva, hogy f_1 és f_2 egész szám kapjuk, hogy: $f_1 = 2$ és $f_2 = 10$. 2 pont

Ugyanígy a 3)-ból $f_4+f_5 = 6$, amit a 4)-gyel összevetve és felhasználva, hogy f_4 és f_5 egész szám kapjuk, hogy: $f_4 = 4$ és $f_5 = 2$. 2 pont

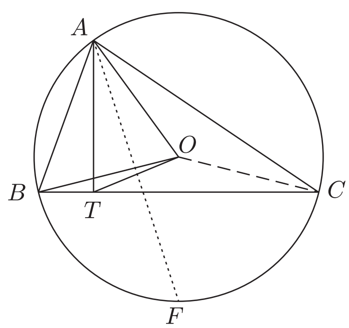
Tehát az osztályátlag: $\dfrac{2\cdot 1+10\cdot 2+8\cdot 3+4\cdot 4+2\cdot 5}{26}=\dfrac{72}{26}\approx 2{,}77.$ 1 pont

Megjegyzés: Kicsit gyorsabb a számolás, ha nem számoljuk ki csak az f_3-at.

$$\frac{f_1\cdot 1+f_2\cdot 2+f_3\cdot 3+f_4\cdot 4+f_5\cdot 5}{f_1+f_2+f_3+f_4+f_5}\approx\frac{1{,}83\cdot 12+8\cdot 3+4{,}33\cdot 6}{26}\approx 2{,}77.$$

4. Legyen az ABC hegyesszögű háromszögben az A-ból induló magasság talp pontja T, a háromszög köré írt kör középpontja O és sugara R. Bizonyítsa be, hogy ha az AT szakasz hossza R, akkor az OT szakasz merőleges az A-ból induló szögfelezőre. (6 pont)

1. megoldás.



Mivel $|AT|=R=|AO|$, az ATO háromszög egyenlőszárú. 1 pont

$BAT\sphericalangle=90^\circ-ABC\sphericalangle$, mert a BAT háromszög derékszögű. 1 pont

Az AOB, BOC és COA egyenlőszárú háromszögek alapjain fekvő szögek (amelyek egy háromszögön belül egyenlők) összege az ABC háromszög szögeinek összege, azaz 180°. Így: $ABO\sphericalangle+OBC\sphericalangle+OCA\sphericalangle=90^\circ$. Tehát $OAC\sphericalangle=OCA\sphericalangle=90^\circ-(ABO\sphericalangle+OBC\sphericalangle)=$ $=90^\circ-ABC\sphericalangle=BAT\sphericalangle$. 3 pont

(Aki ismeri, hivatkozhat a középponti és kerületi szögek tételére, amely szerint $AOC\sphericalangle=$ $=2\cdot ABC\sphericalangle$ és így, mivel az OAC háromszög egyenlőszárú: $OAC\sphericalangle=90^\circ-ABC\sphericalangle=$ $=BAT\sphericalangle$.)

Az elmondottak alapján az ATO egyenlőszárú háromszög A-ból induló szögfelezője egybeesik az ABC háromszög A-ból induló szögfelezőjével, tehát az OT szakasz merőleges az ABC háromszög A-ból induló szögfelezőjére. 1 pont

2. megoldás. A körülírt körön az A-t nem tartalmazó BC ív felezőpontja legyen F!

Az OF szakasz a BC oldal felezőmerőlegesére esik, így párhuzamos AT-vel. 1 pont

Ebből, és abból, hogy $R=|TA|=|AO|=|OF|$, következik, hogy a $TAOF$ négyszög rombusz. 1 pont

Tehát átlói, TO és AF merőlegesek egymásra. 1 pont

Mivel AF az A-ból induló szögfelező, a feladat állítása igaz. 3 pont