Bolyai János

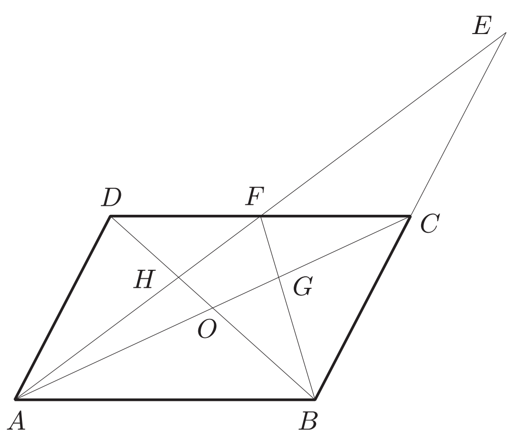
Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalát a C-n túl az oldal hosszával meghosszabbítva az E pontot kapjuk. Az AE szakasz az F pontban metszi a CD oldalt. Az AF szakasz a H pontban metszi a BD átlót és a BF szakasz az AC átlót a G pontban metszi, valamint a BD és AC átlók metszéspontja O. Igazolja, hogy az így keletkezett $HOGF$ négyszög területe a paralelogramma területének $\frac{1}{12}$-ed része!



Megoldás. Az FGC és ABG háromszögek hasonlóak és a hasonlóság aránya 0,5. Ezért G harmadolja BF-et.

A HFD és ABH háromszögek hasonlóak és a hasonlóság aránya 0,5. Ezért H harmadolja AF-et.

Így HG az AB harmadrésze.

Ha az $ABCD$ paralelogramma AB-hez tartozó magasságának hossza m, akkor a területe $T = AB \cdot m$.

Ha m_1 a HGO, m_2 a HGF háromszög HG-hez tartozó magasságának hossza, akkor:

$$T_{HOGF} = T_{HOG} + T_{HGF} = \frac{HG \cdot m_1}{2} + \frac{HG \cdot m_2}{2} = \frac{HG(m_1 + m_2)}{2} =$$
$$= \frac{HG}{2} \cdot (m_1 + m_2) = \frac{AB}{6} \cdot \frac{m}{2} = \frac{1}{12} \cdot T.$$

2. 480 darab egységkockából egy 6, 8, 10 élhosszúságú téglatestet építettünk. Az egységkockák csúcsai hány olyan téglatestet határoznak meg, amelynek oldallapjai párhuzamosak az eredeti téglatest oldallapjaival?

Megoldás. Az I. kategória 2. feladatának bármelyik megoldásából következik, hogy a keresett szám:

$$\binom{11}{2} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2} = 55 \cdot 36 \cdot 21 = 41\,580.$$

3. Igazolja, hogy ha n 2-nél nagyobb egész szám, akkor megadható n különböző pozitív egész szám úgy, hogy bármelyik osztója a többi összegének!

Megoldás. Legyen $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ és $a_k = 3 \cdot 2^{k-3}$, $3 \leqq k \leqq n$, és vezessük be a szokásos

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

jelölést!

Ismert és számos egyszerű módon igazolható az $1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{m-1} = 2^m - 1$ azonosság. (Pl. legyen $S_m = 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{m-1}$, ekkor $2 \cdot S_m = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^m$ és ebből az előzőt kivonva az azonosságot kapjuk.) Ezt felhasználva látható, hogy $a_k = s_{k-1}$, $3 \leqq k \leqq n$.

Továbbá nyilvánvaló, hogy $a_k \mid a_i$ ha $3 \leqq k \leqq i$ és $a_1 \mid s_n - a_1$.

Mivel $2 \mid a_1 + a_3$ és $2 \mid a_k$, ha $k \geqq 4$, azért $a_2 \mid s_n - a_2$.

Végül legyen $k \geqq 3$. Ekkor $s_n - a_k = s_{k-1} + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n$.

Láttuk, hogy $s_{k-1} = a_k$ és $a_k \mid a_{k+i}$, tehát $a_k \mid s_n - a_k$.