Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Ha $A = 1\,111\,111\,111$ és $B = 111\,111$, akkor mennyi A és B legnagyobb közös osztója?

Megoldás. Felhasználjuk, hogy két szám legnagyobb közös osztója a két szám különbségét is osztja: $d = (A; B) \Rightarrow d \mid A - B = 1\,111\,000\,000$. 1 pont

Mivel A és B páratlan, továbbá egyik sem osztható 5-tel, ezért a legnagyobb közös osztó sem 2-vel sem öttel nem osztható. Így az előző feltételből $d \mid 1111$ következik. 2 pont

Most azt tudjuk, hogy a keresett d B-nek és 1111-nek is osztója, tehát ezek különbségét is osztja: $d \mid 111\,111 - 1111 = 110\,000$. Elismételve a fenti okoskodást, innen $d \mid 11$ következik. 2 pont

Az eddigiek alapján $d = 1$ vagy $d = 11$. Könnyű ellenőrizni (vagy a 11-es oszthatósági szabályt ismerve is következik), hogy $11 \mid A$ és $11 \mid B$.

Tehát a keresett érték, A és B legnagyobb közös osztója a 11. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Mennyi az $f(x) = \left|x^2 - x\right| + \left|x^2 + 3x + 2\right|$ függvény legnagyobb és legkisebb értéke a $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ zárt intervallumon? Mely helyeken veszi fel ezeket az értékeket?

Megoldás. A másodfokú kifejezések előjelének vizsgálata, az abszolút érték felbontása:

$$\begin{aligned} \left|x^2 - x\right| &= x^2 - x, \quad \text{ha} \quad x \in \left]-\infty; 0\right] \cup \left[1; \infty\right[\,, \\ \left|x^2 - x\right| &= x - x^2, \quad \text{ha} \quad x \in \left]0; 1\right[\,, \end{aligned}$$ 1 pont

$$\begin{aligned} \left|x^2 + 3x + 2\right| &= x^2 + 3x + 2 \qquad \text{ha} \quad x \in \left]-\infty; -2\right] \cup \left[-1; \infty\right[\,, \\ \left|x^2 + 3x + 2\right| &= -x^2 - 3x - 2, \quad \text{ha} \quad x \in \left]-2; -1\right[\,. \end{aligned}$$ 1 pont

A megadott intervallumon a függvényt a következő hozzárendelési szabályok adják meg:

$$f(x) = -4x - 2, \qquad \text{ha } x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right[, \qquad 1 \text{ pont}$$

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}, \qquad \text{ha } x \in [-1; 0], \qquad 1 \text{ pont}$$

$$f(x) = 4x + 2, \qquad \text{ha } x \in \left]0; \frac{1}{2}\right]. \qquad 1 \text{ pont}$$

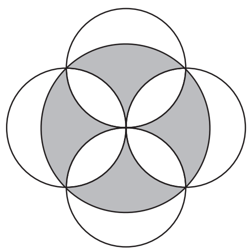
Az $f(x)$ függvény folytonos az adott intervallumon. Grafikonja szimmetrikus az intervallum felezési pontjára, az $x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$ intervallumon szigorú monoton csökkenő, az $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ intervallumon szigorú monoton növekedő, mivel az intervallum zárt, így a maximumát a végpontokban veszi fel. (Grafikon felrajzolása vagy rövid indoklás.) 1 pont

A minimumát az $x = -\frac{1}{2}$ helyen veszi fel, $f_{\min} = \frac{3}{2}$, a maximumát az $x = \frac{1}{2}$ és $x = -\frac{3}{2}$ helyeken veszi fel, és $f_{\max} = 4$. 1 pont

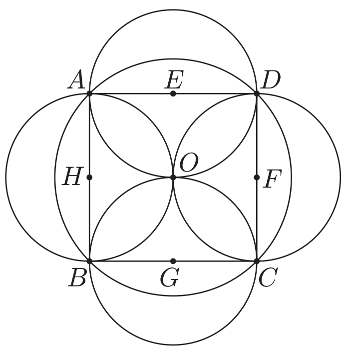
---

Összesen: 7 pont

3. Mekkora a színezett részek területeinek összege, ha a kis körök sugara r?



Megoldás.



Az O középpontú négyes forgásszimmetria miatt az $ABCD$ négyszög négyzet. 1 pont

Ha r a kis kör sugara, akkor az $ABCD$ négyzet oldala $2r$. 1 pont

A nagyobb kör sugara a négyzet átlójának fele, azaz $R = \sqrt{2}r$. 1 pont

Az A és O végpontú, két negyedkörrel határolt területet két negyedkör területének összegéből az $AEOH$ négyzet területét levonva kapjuk meg:

$$T_{AO} = 2\frac{r^2\pi}{4} - r^2. \qquad 1 \text{ pont}$$

1. megoldás. A nagyobb, R sugarú körben, az $ABCD$-n kívül lévő területek összegét megkapjuk, ha az R sugarú kör területéből levonjuk a négyzet területét:

$$T_{\text{külső}} = R^2\pi - (2r)^2. \qquad 1 \text{ pont}$$

Vonjuk le az $AEOH$ négyzet területéből a T_{AO} területet! Az $ABCD$ négyzetben lévő színezett részek területek összege ennek négyszerese lesz:

$$T_{\text{belső}} = 4 \cdot \left(r^2 - T_{AO}\right) = 4 \cdot \left(r^2 - \left(2r^2\frac{\pi}{4} - r^2\right)\right) = 4 \cdot \left(2r^2 - r^2\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 8r^2 - 2r^2\pi = 8r^2 - R^2\pi.$$ 1 pont

Így a keresett színezett részek összege $T_{\text{külső}} + T_{\text{belső}} = 4r^2$. 1 pont

2. megoldás. A színezett részek összegét megkaphatjuk, ha az R sugarú kör területéből kivonjuk a T_{AO} terület négyszeresét:

$$T = R^2\pi - 4 \cdot T_{AO}.$$ 1 pont

Behelyettesítve R-et és T_{AO} értékét, majd átalakítva:

$$T = \left(\sqrt{2}r\right)^2\pi - 4 \cdot \left(2\frac{r^2\pi}{4} - r^2\right) = 2r^2\pi - 2r^2\pi + 4r^2 = 4r^2.$$ 1 pont

Így a keresett színezett részek összege $T = 4r^2$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Legyen $A = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, $B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right)$, $C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Bizonyítsuk be, hogy a $K = \sqrt{(A + B - C) \cdot n + 2}$ kifejezés értéke minden n természetes szám esetén irracionális!

Megoldás. Az A, B és C kifejezéseket hozzuk egyszerűbb alakra.

Az A kifejezés a nevező gyöktelenítésével

$$A = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2 + \sqrt{3}$$

alakra hozható. 1 pont

A B kifejezés egy nevezetes azonosság felismerésével (vagy zárójelfelbontás útján) a

$$B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2\sqrt{3}}\right) = 5 - 2\sqrt{3}$$

alakot ölti. 1 pont

A C kifejezés négyzetgyök alatti része egy kéttagú különbség négyzete, ezért

$$C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 - 4\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{3}\right| = 2 - \sqrt{3}.$$ 2 pont

Ezen értékeket behelyettesítve $A + B - C = 2 + \sqrt{3} + 5 - 2\sqrt{3} - \left(2 - \sqrt{3}\right) = 5$ adódik, tehát a vizsgálandó kifejezés a $K = \sqrt{5n + 2}$. 1 pont

Indirekt tegyük fel, hogy K valamilyen n esetén racionális. Mivel n természetes szám, ezért $5n + 2$ is az, tehát ha $\sqrt{5n+2}$ racionális, akkor egész is, vagyis $5n + 2$ négyzetszám. 1 pont

Viszgáljuk meg, hogy egy természetes szám négyzete milyen maradékot adhat 5-tel osztva.

– ha a szám $5k$ alakú, akkor a négyzete $25k^2$ alakú, tehát a maradék 0.

– ha a szám $5k \pm 1$ alakú, akkor a négyzete $25k^2 \pm 10k + 1$ alakú, tehát a maradék 1.

– ha a szám $5k \pm 2$ alakú, akkor a négyzete $25k^2 \pm 20k + 4$ alakú, tehát a maradék 4.

Más lehetőség nincs, tehát egy négyzetszám 5-tel osztva nem adhat 2 maradékot, így $5n + 2$ nem lehet négyzetszám. Ellentmondásra jutottunk, vagyis K valóban minden természetes n értékre irracionális. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy kocka csúcsait megcímkézzük az $1, 2, \ldots, 8$ számokkal (minden címkét pontosan egy csúcsra írunk fel). A kocka egy lapjának értéke: a lapot határoló csúcsokon lévő számok összege.

Legfeljebb mekkora lehet egy kocka legkisebb értékű lapjának értéke?

Megoldás. Mivel minden címkét háromszor számolunk (hiszen minden csúcs 3 laphoz tartozik), így a hat lap összértéke: $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 108$. 1 pont

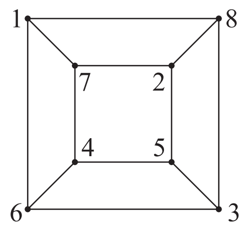
Így a legkisebb értékű lap értéke legfeljebb $108/6 = 18$.

(*Megjegyzés:* Ha a diák azzal érvel, hogy egy átlagos lap értéke 18, és mivel nem lehet minden lap értéke nagyobb, mint az átlag $\rightarrow$ így legfeljebb 18 a legkisebb értékű lap értéke kapja meg az $1 + 2$ pontot.) 2 pont

Ahhoz, hogy a legkisebb összeg 18 legyen az kell, hogy az összes többi lapösszeg is 18 legyen.

(*Megjegyzés:* Emiatt a kocka párhuzamos 4 élén felváltva a, $18 - a$, a, $18 - a$ összegeknek kell szerepelni, ami miatt könnyű találni jó megoldást.) 1 pont

És ez meg is valósítható, például az alábbi módon:



3 pont

Összesen: 7 pont