Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

Feladatok

1. Az S8Q-bolygón n különböző ország osztozik ($50 < n < 80$).

Bármely két különböző ország között vagy baráti, vagy ellenséges a kapcsolat (harmadik eset nincs, és a kapcsolat kölcsönös) a következő két szabály mellett:

Ha A, B, C három különböző ország, és ...

(1) A barátságos B-vel, valamint B barátságos C-vel, akkor A is barátságos C-vel.
(... barátom barátja a barátom ...)

(2) A ellenséges B-vel, és B is ellenséges C-vel, akkor A barátságos C-vel.
(... ellenségem ellensége a barátom ...)

Valamint tudjuk, hogy az n ország között lévő összes lehetséges viszonynak éppen a fele baráti, a másik fele ellenséges.

Hány ország van az S8Q-bolygón?

2. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egész számok. A háromszögbe írt kör r, és a hozzáírt körök r_1, r_2, r_3 sugarainak mérőszámai páros egész számok. Tudjuk még, hogy,

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 + r \cdot r_2 \cdot r_3 + r \cdot r_3 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3.$$

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű!

3. Egy n pozitív egész szám *17-edíziglen izgalmas,* ha a következő feltételek teljesülnek rá:

(1) nincs (az 1-en kívül) négyzetszám osztója;

(2) pontosan 16 pozitív osztója van;

(3) ha nagyság szerint sorba rendezem a 16 darab pozitív osztót, akkor a 10-dik, és a 7-dik osztó különbsége éppen 17.

Kérdés: Hány *17-edíziglen izgalmas* szám van?

Az eredményhirdetést 2014. május 28-án (szerdán) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).