Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$x^2 - y^2 = 2(x+y),$$
$$x^2 + y^2 = 5(x-y).$$

Megoldás. Alakítsuk szorzattá az első egyenlet bal oldalát:

$$(x+y)(x-y) = 2(x+y).$$ 1 pont

Bal oldalra rendezve, és $(x+y)$-t kiemelve kapjuk, hogy

$$(x+y)(x-y-2) = 0.$$

Szorzat akkor nulla, ha az egyik tényezője nulla. Így két lehetőségünk van:
I. $x+y=0.$ 1 pont
Ebből $x-$et kifejezve és az $x^2+y^2=5(x-y)$ egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$2y^2 = -10y.$$

Egy oldalra rendezve és szorzattá alakítva:

$$y^2 + 5y = 0,$$
$$y(y+5) = 0,$$

amiből $y_1 = 0$ vagy $y_2 = -5$ adódik. 1 pont
Ennek megfelelően $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 5$. 1 pont
II. $x-y-2=0.$ 1 pont
Ebből x-et kifejezve és a másik egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$(2+y)^2 + y^2 = 5 \cdot 2,$$
$$2y^2 + 4y - 6 = 0.$$ 1 pont

Aminek megoldásai az $y_3 = 1$ és az $y_4 = -3$. A nekik megfelelő x-ek: $x_3 = 3$ és az $x = -1$. 1 pont

Tehát az egyenletet négy számpár elégíti ki, nevezetesen a $(0;0)$, $(5;-5)$, $(3;1)$, $(-1;-3)$.

Összesen: 7 pont

2. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amire

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) < 0{,}51?$$

Megoldás. Közös nevezőre hozzuk a zárójelekben lévő kifejezéseket:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{4-1}{4}\cdot\frac{9-1}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}.$$ 1 pont

A számlálókat és a nevezőket is szorzattá alakítjuk:

$$\frac{4-1}{4}\cdot\frac{9-1}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)\cdot(n-1)}\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n}.$$ 2 pont

Az összes lehetséges egyszerűsítés elvégzése után a következő alakot kapjuk:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$ 1 pont

Keressük tehát a legkisebb n értéket, amire $\frac{n+1}{2n} < 0{,}51$. 1 pont

Egyszerű átalakításokkal:

$$\frac{n+1}{2n} < 0{,}51 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} < \frac{1}{2}+\frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 2n > 100 \Leftrightarrow n > 50.$$ 1 pont

A legkisebb érték, amire teljesül az egyenlőtlenség $n = 51$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Van-e olyan számrendszer, amelyben az $\overline{572}$ alakú szám osztható a $\overline{275}$ alakú számmal?

Megoldás. Tegyük fel, hogy van ilyen számrendszer. Legyen a számrendszer alapszáma x. Tudjuk, hogy ekkor $x > 1$ egész szám.

Térjünk át 10-es számrendszerre! Az oszthatóság pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan a feltételeknek megfelelő n, amelyre az $\dfrac{5x^2+7x+2}{2x^2+7x+5}$ értéke egész szám. 1 pont

A törtet átalakítva:

$$\frac{5x^2+7x+2}{2x^2+7x+5} = \frac{(5x+2)(x+1)}{(2x+5)(x+1)} = \frac{5x+2}{2x+5} = \frac{2(2x+5)+x-8}{2x+5} = 2 + \frac{x-8}{2x+5}.$$ 2 pont

Vizsgáljuk az $\dfrac{x-8}{2x+5} < 1$ egyenlőtlenséget. Mivel a $2x+5 > 0$, ezért

$$x - 8 < 2x + 5$$
$$-13 < x,$$

ezért az egyenlőtlenség minden 1-nél nagyobb egész szám esetén teljesül. 2 pont

Emiatt csak az $x = 8$ esetben lehet megoldás 1 pont

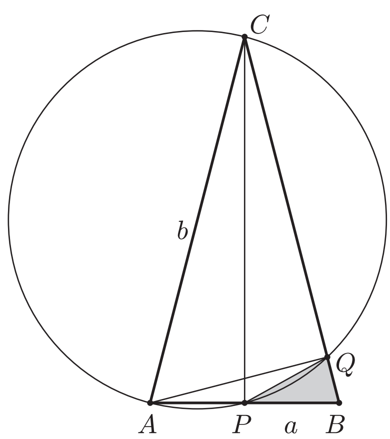
A 8-as számrendszerben valóban teljesül az oszthatóság. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző megtalálja a helyes alapszámot, de nem bizonyítja, hogy más lehetőség nincs, legfeljebb 3 pontot kaphat.

4. Az egyenlőszárú ABC háromszög b szára kétszer olyan hosszú, mint az a alapja. Az AC szárra mint átmérő fölé kört rajzolunk. Ez a kör a AB alapot P, az BC szárat Q pontban metszi. Hanyad része a PQB háromszög területe az ABC háromszög területének?

Megoldás.



Mivel AC, mint átmérő fölé rajzoltunk kört, így ez AC Thálesz köre: $APC\sphericalangle = AQC\sphericalangle = 90°$.

Így P az alaphoz tartozó magasság talppontja, Q pedig a BC szárhoz tartozó magasság talppontja. 1 pont

APC háromszög hasonló a BQA háromszöghöz, mivel megegyeznek a szögeik: $APC\sphericalangle = AQC\sphericalangle = 90°$, illetve az ABC háromszög alapon fekvő szögei:

$$ABQ\sphericalangle = CAP\sphericalangle.$$ 1 pont

Ezért a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{QB}{AB} = \frac{AP}{AC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{QB}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{2a},$$

mivel $b = 2a$, ezért $QB = \frac{a}{4}$. 1 pont

Az APC háromszög és a BQA háromszög hasonlóságának aránya, így

$$\lambda = \frac{QB}{AP} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{2}.$$ 1 pont

A hasonló alakzatok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyezik meg:

$$\frac{T_{ABQ}}{T_{APC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$(i) \qquad T_{APC} = 4 \cdot T_{ABQ}.$$ 1 pont

Az APC háromszög területe az ABC háromszög területének fele, mivel az ABC egyenlőszárú háromszögben a PC magasságvonal egyben tükörtengely is:

$$T_{APC} = \frac{T_{ABC}}{2}.$$

Az ABQ háromszögben QP az AB oldalhoz tartozó súlyvonal. A súlyvonal felezi a területet, (mivel azonos magasság mellett az alap hossza feleződik) így a PQB háromszög területe fele az ABQ háromszögének: $T_{ABQ} = 2 \cdot T_{PBQ}$. 1 pont

Ezeket behelyettesítve (i)-be kapjuk, hogy

$$\frac{T_{ABC}}{2} = 4 \cdot 2 \cdot T_{PBQ},$$

$$\frac{T_{PBQ}}{T_{ABC}} = \frac{1}{16}.$$

Azaz a PBQ háromszög az ABC háromszög területének 16-a. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Hány olyan szám van 0 és 9999 között, amelyikben több 2-es van a jegyek között, mint 1-es? (Pl. 2012 ilyen, de 2014 nem.)

Megoldás. 0–9999-ig összesen 10 000 darab szám van.

Minden számot négyjegyűként fogunk kezelni (pl. a 13-at $\to$ 0013-ként).

Az alapötlet: megszámolom az összes olyan számot, amelyikben ugyanannyi darab 1-es és 2-es jegy szerepel.

A „maradék" számok: azok, ahol vagy az 1-esből van több, mint a 2-es jegyből, vagy fordítva.

A „maradék" számnak éppen a fele lesz az, ahol több 2-es jegy van, mint 1-es, mert a „maradék" számok párokba rendezhetőek úgy, hogy

$a)$ az egy párba kerülők közül az egyikben az 1-es jegy, a másikban a 2-es jegyből van több,

$b)$ minden „maradék" szám pontosan egy párba kerül.

(Egy lehetséges párosítás: egy „maradék" szám párja: az a „maradék" szám, amelyet úgy kapok, hogy az eredeti szám 1-es jegyeit 2-esre, 2-es jegyeit 1-esre cserélem. Vagyis pl. $2012 \leftrightarrow 1021$, vagy $110 = 0110 \leftrightarrow 0220 = 220$.) 2 pont

Most lássuk a számolást!

Olyan szám, amelyben 0 darab 1-es és 0 darab 2-es jegy van: $8^4 = 4096$ darab van. 1 pont

Olyan, ahol 1 darab 1-es, és 1 darab 2-es van: $4 \cdot 3 \cdot 8^2 = 768$ darab van. 1 pont

(Hiszen pl. az 1-es jegy 4 helyre, a 2-es már csak 3 helyre tehető, a maradék 2 jegy pedig 8-8 féleképp tölthető ki!)

Olyan szám, amelyben 2-2 1-es, és 2-es jegy van, $\binom{4}{2} = 6$ darab van. 1 pont

Vagyis összesen $4096 + 768 + 6 = 4870$ darab olyan szám van, amelyikben azonos számú 1-es, és 2-es van.

Vagyis a „maradék" számok száma: $10\,000 - 4870 = 5130$.

Innen a nekünk jó számok száma: $\frac{5130}{2} = 2565$. 1 pont

Vagyis 2565 darab olyan legfeljebb négyjegyű szám van, amelyikben több 2-es jegy van, mint 1-es. 1 pont

Összesen: 7 pont