Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
3. (döntő) forduló
Kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok a pozitív természetes számok, amelyek reciprokának tizedes tört alakja véges, és a szám köbének 7-szer annyi osztója van, mint magának a számnak?

Megoldás. Jelöljük a keresett számot n-nel!

Mivel az $\frac{1}{n}$ szám tizedes tört alakja véges, ezért $n = 2^a \cdot 5^b$, ahol $ab \in \mathbb{N}$.

$$d(n) = (a+1) \cdot (b+1), \qquad d(n^3) = (3a+1) \cdot (3b+1),$$

ezért $7 \cdot (a+1) \cdot (b+1) = (3a+1) \cdot (3b+1)$.

Rendezés után: $ab - 2a - 2b - 3 = 0$.

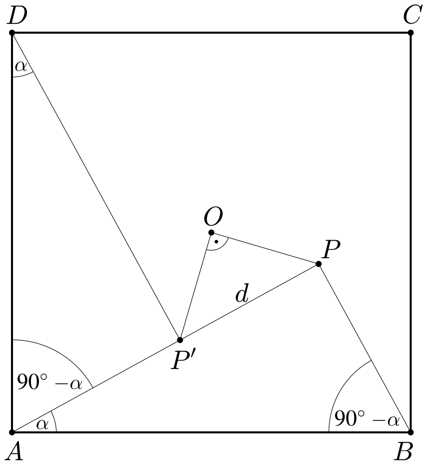
Szorzattá alakítva: $(a-2) \cdot (b-2) = 7$.

Mivel a 7 prím, ezért $a - 2 = 1$ és $b - 2 = 7 \longrightarrow a = 3$ és $b = 9$,
vagy $a - 2 = 7$ és $b - 2 = 1 \longrightarrow a = 9$ és $b = 3$.

Így a keresett számok: $n = 2^3 \cdot 5^9 = 15\,625\,000$
vagy $n = 2^9 \cdot 5^3 = 64\,000$.

2. Az $ABCD$ négyzet belsejében egy P pontra teljesül, hogy $APB\sphericalangle = 90°$ és $PA > PB$. Jelöljük d-vel PA és PB szakasz hosszának különbségét, a négyzet középpontját pedig O-val! Fejezzük ki az OP távolságot d segítségével!

I.a. megoldás.



Jelöljük a PAB szöget α-val! Ekkor a ABP szög $90° - \alpha$. Forgassuk el az ABP háromszöget az O középpont körül $-90°$-kal! A APB háromszög képe ekkor a $DP'A$ háromszög lesz.

A P' pont rajta van az AP szakaszon, mert az $AP'D$ háromszögnek A-nál $90° - \alpha$ nagyságú szöge van, és a két háromszög (APB és $AP'D$) két A-nál lévő szögének összege $90°$ ($90° - \alpha + \alpha = 90°$). A P' a PA szakasz belső pontja, mert $PA > PB = P'A$.

A PP' szakasz hossza a megadott d-vel egyenlő, mert $AP' = PB$.

A $90°$-os forgatás miatt a POP' háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög.

Tehát a POP' háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $OP = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

I.b. megoldás. Osszuk fel AP szakaszt A-tól kezdve egy PB-vel egyenlő hosszú és egy d hosszúságú részre, a kapott osztópont legyen P'! .

A APB háromszög egybevágó az $AP'D$ háromszöggel, mert két-két oldaluk és a közbezárt szögük azonos, vagyis: $PB = P'A$, $AB = AD$ és a közbezárt szög $90° - \alpha$.

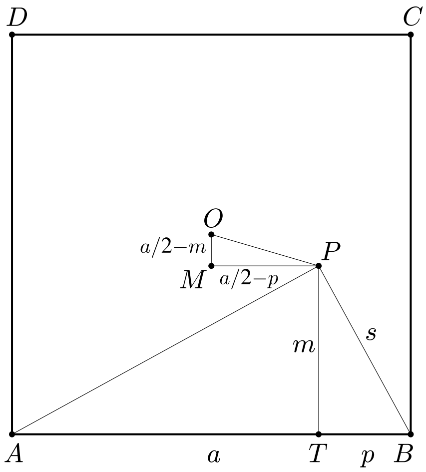
Az APB háromszög O pont körüli $-90°$-os elforgatottja a $DP'A$ háromszög (mert az AB oldal képe az AD oldal).

Tehát a P pont O körüli $-90°$-os elforgatottja P'.

A $90°$-os forgatás miatt a POP' háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög.

Tehát a POP' háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $OP = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

II. megoldás.



A feladat feltételeiből következik, hogy P rajta van az AB átmérő fölé emelt Thalesz-körön, és annak a (kisebbik) OB ívén található. Vagyis a P pont közelebb van az AB és BC oldalakhoz, mint O.

Legyen M az O-ból az AB-re és P-ből az AD-re állított merőleges egyenesek metszéspontja!

Az OP távolságot az OPM háromszögből határozhatjuk meg.

Jelöljük az APB háromszög P-ből induló magasságát m-mel, talppontját T-vel, a BT szakaszt pedig p-vel! Ekkor az OPM háromszögben $OM = a/2 - m$ és $MP = a/2 - p$, ahol „a" a négyzet oldalát jelöli.

Pitagorasz-tétel alapján az OPM háromszögben:

$$OP^2 = OM^2 + MP^2,$$

$$OP^2 = \left(\frac{a}{2} - m\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - p\right)^2.$$

A műveleteket elvégezve:

$$OP^2 = \frac{a^2}{2} - am - ap + m^2 + p^2.$$

Végezzük el az alábbi helyettesítéseket:

Az ABP háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $a^2 = s^2 + (s+d)^2$.

Az ABP háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva: $am = s(s+d)$.

Az ABP háromszögben a befogótétel alapján: $ap = s^2$.

A BTP háromszögben a Pitagorasz-tételt felhasználva: $m^2 + p^2 = s^2$.

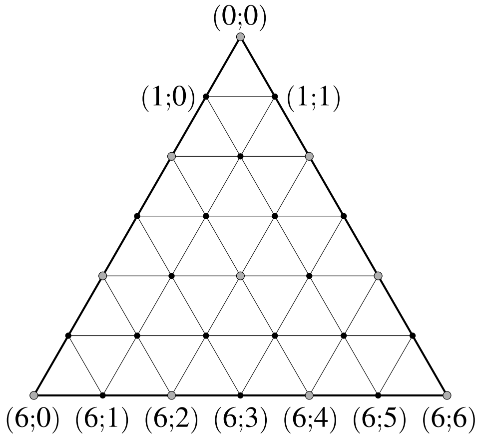
$$OP^2 = \frac{s^2 + (s+d)^2}{2} - s(s+d) - s^2 + s^2.$$

A műveletek elvégzése és az összevonások után:

$$OP^2 = \frac{d^2}{2} \quad \text{vagyis} \quad OP = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

3. Egy szabályos háromszög oldalait felosztjuk 6-6 egyenlő részre, és az osztópontokon keresztül az oldalakkal párhuzamos szakaszok segítségével a háromszöget feldaraboljuk 36 egybevágó részre. Ezután a kis háromszögek minden csúcspontjában elhelyezünk egy-egy katicabogarat, amelyek elkezdenek mozogni a különböző éleken azonos sebességgel. Amikor egy csomópontba érnek, megváltoztatják a haladási irányukat 60 vagy 120°-kal. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan pillanat, amikor két katica ugyanabban a csúcsban találkozik. Igaz marad-e az állítás akkor is, ha kezdetben a háromszög oldalait csak 5-5 egyenlő részre osztjuk fel?

Megoldás. Rendeljünk a kis háromszögek csúcspontjaihoz rendezett számpárokat az alábbi ábra szerint.



Nevezzük kitüntetett csúcsoknak azokat, amelyekhez a $(0;0)$, $(2;0)$, $(2;2)$, $(4;0)$, $(4;2)$, $(4;4)$, $(6;0)$, $(6;2)$, $(6;4)$, $(6;6)$ számpárok tartoznak. Egy szakasznyi haladás után, ha semelyik két katica sem találkozik, akkor a kitüntetett csúcsokból induló 10 katica nem kitüntetett csúcsokba kerül, és 10 másik nem kitüntetett csúcsból induló katica foglalja el a megkülönböztetett helyeket.

Még egy szakasznyi haladás után ez a 20 katica mindegyike nem kitüntetett csúcsba fog eljutni.

Mivel a nem megkülönböztetett helyek száma csak 18, ezért a skatulya-elv alapján biztosan lesz két olyan bogár, amelyik találkozik egymással.

Ha az eredeti háromszög oldalainak felosztását 6-ról 5-re csökkentjük, akkor osszuk a csúcsokat a rendezett számpárok alapján az alábbi csoportokba:

$$\big\{(0;0),(1;0),(1;1)\big\},$$
$$\big\{(2;0),(3;0),(3;1)\big\},$$
$$\big\{(2;1),(3;2),(3;3),(2;2)\big\},$$
$$\big\{(4;0),(5;0),(5;1)\big\},$$
$$\big\{(4;1),(5;2),(5;3),(4;2)\big\},$$
$$\big\{(4;3),(5;4),(5;5),(4;4)\big\}.$$

Ha minden katica a saját csoportjába tartozó pontok között mozog pozitív forgásirány szerint, akkor soha nem fog semelyik kettő találkozni.