Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. A karácsonyi vásárra a 9.c-sek diós és mákos kifliket készítettek. Mindből kicsit és nagyot is. A karácsonyi vásár végén megmaradt kiflik számairól a következő megállapításokat tették:

$a)$ Összesen 57 darab kifli maradt meg.

$b)$ A mákos kiflik száma osztható 11-gyel.

$c)$ A nagy mákos kiflik száma egyenlő a diós kiflik számával.

$d)$ A legkevesebb a kis diós kifliből van.

$e)$ Minden kifli száma prím.

Határozzuk meg, hogy melyik kifli típusból hány darab maradt meg!

Megoldás. Jelöljük a kis diós kifliket d-vel, a nagy diós kifliket D-vel, a kis mákos kifliket m-mel, és a nagy mákos kifliket M-mel.

Az $a)$ állítás szerint $d + D + m + M = 57$.

Mivel 57 páratlan, így van páros számú kifli. 1 pont

Mivel az $e)$ állítás szerint minden kifli száma prímszám, és csak egyetlen páros prím van, és a $d)$ állítás szerint a kis diós kifliből van a legkevesebb, így $d = 2$. 1 pont

Ezért $D + m + M = 55$. A $b)$ állítás szerint $m + M$ osztható 11-gyel. Mivel 55 is osztható 11-gyel, így D is osztható 11-gyel. 1 pont

De mivel D is prím, így $D = 11$. 1 pont

A $c)$ állítás miatt $M = d + D = 2 + 11 = 13$. 1 pont

Mivel $D = 11$, így $m + M = 44$. Mivel $M = 13$, így $m = 31$. 1 pont

Tehát kis diós kifliből 2, nagy diós kifliből 11, kis mákos kifliből 31, nagy mákos kifliből 13 darab van. Ezek valóban kielégítik az állítás feltételeit. 1 pont

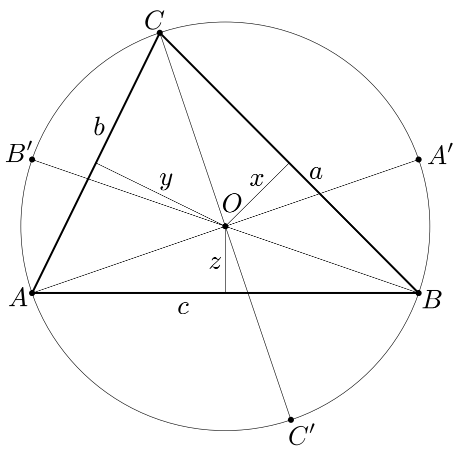
---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a tanuló indoklás nélkül közli a kiflik számát, akkor arra legfeljebb 3 pont adható.

2. Az ABC háromszög csúcsait a köré írt kör O középpontjára tükrözve kapjuk az A', B', C' pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az $AC'BA'CB'$ hatszög oldalainak négyzetösszege egyenlő a középpontnak a háromszög oldalaitól mért távolságai négyzetösszegének nyolcszorosával.

Megoldás.



Használjuk az ábra jelöléseit és legyen r a háromszög köré írt kör sugara!

CAC', $C'BC$, ABA', $A'CA$, BCB', $B'AB$ szögek Thalész tétele értelmében derékszögek. 1 pont

A tükrözés miatt $AB' = A'B$, $AC' = A'C$ és $BC' = B'C$. 1 pont

A megfelelő derékszögű háromszögekben felírjuk Pitagorasz tételét:

$$(AC')^2 = (A'C)^2 = 4r^2 - b^2;$$
$$(BC')^2 = (B'C)^2 = 4r^2 - a^2;$$
$$(AB')^2 = (A'B)^2 = 4r^2 - c^2.$$
2 pont

Így a hatszög oldalainak négyzetösszege: $24r^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$. 1 pont

Szintén Pitagorasz tétele alapján:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} + r^2 - \frac{b^2}{4} + r^2 - \frac{c^2}{4}.$$
1 pont

Ekkor: $8(x^2 + y^2 + z^2) = 24r^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$. 1 pont

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Összesen: 7 pont

3. Határozzuk meg a következő függvény szélsőértékét a $[-2017; 2016]$ intervallumon:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 24}{3x^2 + 8}.$$

Megoldás.

$$f(x) = \frac{6x^2 - 24}{3x^2 + 8} = \frac{2(3x^2 + 8)}{3x^2 + 8} - \frac{40}{3x^2 + 8} = 2 - \frac{40}{3x^2 + 8}.$$ 2 pont

Vizsgálandó a $3x^2 + 8$ kifejezés, melynek minimuma van, így a törtnek maximuma lesz, 1 pont
s a különbségnek, f-nek minimuma lesz. 1 pont

A $3x^2 + 8$ a minimumát az $x = 0$-ban veszi fel. 1 pont

A megadott zárt intervallumon a függvény a $[-2017; 0]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, illetve a $[0; 2016]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, 1 pont
így a megadott intervallumon a függvénynek a két végpontban lokális maximuma van.

Az abszolút maximumát $x = -2017$-ben veszi fel. Ennek értéke $\dfrac{6 \cdot 2017^2 - 24}{3 \cdot 2017^2 + 8}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Adott az $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = k$ egyenlet, ahol k rögzített valós szám. Mutassuk meg, hogy az egyenletnek minden valós k-ra van megoldása, és az egyik megoldás mindig 1 és 2 közé esik!

Megoldás. Az egyenlete alaphalmaza: $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ $(x \neq 1; 2)$. 1 pont

Ha $k = 0$, akkor az egyenlet az $x - 1 = -(x - 2)$ elsőfokú egyenletre vezet, ennek megoldása $x = \dfrac{3}{2}$, megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Ha $k \neq 0$, akkor az $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ halmazon az eredeti egyenlet ekvivalens a

$$kx^2 - x(3k + 2) + 2k + 3 = 0$$

másodfokú egyenlettel. 1 pont

Ennek diszkriminánsa $k^2 + 4$ minden valós k esetén nagyobb 0-nál, így az egyenletnek mindig van megoldása. 1 pont

A másodfokú kifejezés értéke $x = 1$ esetén minden k-ra $+1$, $x = 2$ esetén -1, így az alaphalmazon kívüli 1 és 2 soha nem gyöke az egyenletnek. 1 pont

A másodfokú függvény folytonossága miatt viszont $+1$ és -1 között fel kell vennie a függvénynek a 0-t is. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek biztosan van gyöke az $]1; 2[$-ben. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. $a)$ Seholsincs országban 5 város van. Az országban háromféle közlekedési eszközzel lehet utazni, busszal, vonattal és repülővel. Bármely két város között pontosan egy közlekedési eszköz használható közvetlenül. Igaz-e, hogy mindenképp kiválasztható két város és egy közlekedési eszköz úgy, hogy az egyik városból a másik nem elérhető, még átszállásokkal sem, ha csak a kiválasztott eszközt használjuk?

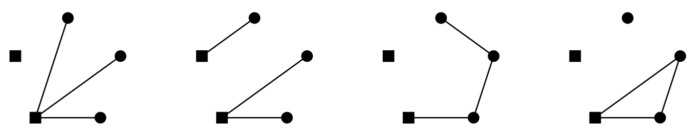
$b)$ Mi volna a helyzet 6 város esetén?

Megoldás. $a)$ Igen, mindig kiválasztható két város és egy közlekedési eszköz a kívánt módon.

Összesen $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ közlekedési útvonal van. 1 pont

Ha minden közlekedési eszközt legalább négy útvonalon használnánk, akkor az útvonalak száma legalább $3 \cdot 4 = 12$ lenne. Ez több, mint 10, tehát van olyan eszköz, amit legfeljebb 3 útvonalon használhatunk. 1 pont

Megmutatjuk, hogy még 3 útvonal esetén is van két város, amik között ezen eszközzel nem lehet utazni. A 3 út csak 4 lényegesen különböző módon helyezkedhet el és könnyen látszik, hogy egyik sem megfelelő. Például a négyzettel jelölt városok között nincs lehetőség utazásra.

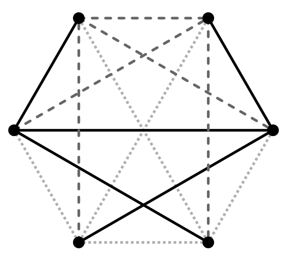


2 pont

Egy másik mód ezen rész megmutatására: Gondoljunk arra, hogy egyesével felépítjük a három útvonalat. Kezdetben öt csoportban vannak a városok úgy, hogy egyikből sem lehet elérni a többit. Ha két csoport közé építünk egy utat, akkor azok összeolvadnak, és a csoporton belül elérhetővé válnak a városok. Mivel csak három utat építünk föl, a végén még mindig van legalább két csoport. Mivel a két csoport között nem vezet út, nem lehet eljutni az egyikből a másikba.

$b)$ 6 város esetén lehetséges, hogy nincs megfelelő választás. 1 pont

A következő ábrán mutatunk egyet a lehetséges ellenpéldák közül. A három szín a három közlekedési eszközt mutatja.



Helyes ellenpélda mutatása. 2 pont

Összesen: 7 pont