Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
2. (döntő) forduló
Kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Dia 37 napon át, minden nap legalább egy feladatot megoldva készült az Arany Dániel matematikaverseny döntőjére. Bizonyítsuk be, hogy volt néhány szomszédos nap, melyeken összesen 13 feladatot oldott meg, ha tudjuk, hogy legfeljebb 60 feladatot csinált meg összesen.

1. megoldás. Jelölje a_i $(i = 1, 2, \ldots, 37)$ az i. napon megoldott feladatok számát. Tudjuk, hogy $a_i \geqq 1$. Használjuk fel, hogy ha az a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ egész számokból képezzük az $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ számokat, akkor ezek valamelyike vagy a skatulya elv miatt valamely kettő különbsége osztható n-nel, hiszen n darab számunk van, ami megegyezik a lehetséges maradékok számával. 3 pont

Tekintsük az első 13 napon megoldott feladatok számából képzett összegeket!

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{13},$$

ekkor ezen összegek valamelyike vagy közülük valamely kettő különbsége osztható 13-mal. Ha valamely elem vagy a különbség éppen 13, akkor készen vagyunk, ha nem ennyi, akkor legalább 26. 2 pont

Tekintsük most az

$$a_{14}, \quad a_{14} + a_{15}, \quad \ldots, \quad a_{14} + a_{15} + \ldots + a_{26}$$

összegeket. Az előbbi állítást alkalmazva, erre ugyanúgy igaz, hogy ezen összegek valamelyike vagy közülük valamely kettő különbsége osztható 13-mal. Ha valamely elem vagy a különbség éppen 13, akkor készen vagyunk, ha nem ennyi, akkor legalább 26. 1 pont

Nézzük most a fennmaradó elemeket: $a_{27}, a_{28}, \ldots, a_{37}$. Mivel $a_1 + a_2 + \ldots + a_{37} \leqq 60$, és ha fennállnak az eddig elmondottak, akkor

$$a_{27} + a_{28} + \ldots + a_{37} \leqq 60 - 2 \cdot 26 = 8.$$

Ez viszont nem lehetséges, mivel Dia minden nap legalább egy feladatot megoldott. 3 pont

Így valamely korábbi elem vagy különbség éppen 13 kell, hogy legyen. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. 1 pont

2. megoldás. Jelölje s_i $(i = 1, 2, \ldots, 37)$ az első i napon Dia által összesen megoldott feladatok számát. Ekkor a feltételek alapján

$$1 \leqq s_1 < s_2 < \ldots < s_{37} \leqq 60. \qquad \text{2 pont}$$

Az egyenlőtlenségláncához 13-at hozzáadva kapjuk, hogy

$$14 \leqq s_1 + 13 < s_2 + 13 < \ldots < s_{37} + 13 \leqq 73. \qquad \text{2 pont}$$

Mivel 1-től 73-ig 73 db pozitív egész szám van és az s_1, s_2, s_{37}, $s_1 + 13$, $s_2 + 13$, $\ldots$, $s_{37} + 13$ számok felsorolásakor az $[1; 73]$-ból 74 db pozitív egész számot írunk fel, ezért a skatulyaelv miatt a számok között kell lennie legalább 2 azonosnak. 3 pont

Vegyünk két egyenlő elemet az $\{s_1, s_2, \ldots, s_{37}, s_1 + 13, s_2 + 13, \ldots, s_{37} + 13\}$ halmazból. Ezekre nem állhat fönn az $s_i = s_j$ vagy $s_i + 13 = s_j + 13$ egyenlőség $i \neq j$ esetén, mivel az $s_i < s_j$, ha $i < j$ az s_i-k definíciója miatt. Azaz az (s_n) sorozat szigorúan monoton növekvő. 1 pont

Tehát $s_i = s_j + 13$ kell, hogy teljesüljön valamely $1 \leqq i \neq j \leqq 37$ esetén. Ismét csak az (s_n) sorozat szigorúan monoton növekedése miatt $j < i$ kell, legyen. 1 pont

Tekintsük tehát a $j < i$ esetén fennálló $s_i = s_j + 13$ esetet. Ekkor $s_i - s_j = 13$, ami éppen azt jelenti, hogy Dia a $(j + 1)$., $(j + 2)$., $\ldots$, i. egymást követő napokon összesen 13 feladatot oldott meg. Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

2. Hányféleképpen lehet úgy kiválasztani egy $n \times n$-es táblázat néhány mezőjét, hogy semelyik két sorban ne egyezzen meg a kiválasztott mezők száma és semelyik két oszlopban se egyezzen meg a kiválasztott mezők száma?

Megoldás. Tekintsünk egy megfelelő kiválasztást.

Egy sorból kiválasztott mezők száma $0, 1, 2, \ldots, n$ lehet, ami összesen $n + 1$ lehetőség, vagyis pontosan egy olyan lesz közülük, amit nem kapunk meg, legyen ez i. Az oszlopoknál ugyanez teljesül, legyen j az az egyetlen 0 és n közé eső egész szám, amely egyik oszlopban sem adja meg az onnan kiválasztott mezők számát. A táblázatból összesen kiválasztott mezők száma egyrészt $1 + 2 + \ldots + n - i$, másrészt $1 + 2 + \ldots + n - j$, ezért $i = j$, vagyis ugyanaz az érték hiányzik a soroknál és az oszlopoknál. 2 pont

Ha van üres sor, akkor nem lehet teljes (n kiválasztott elemet tartalmazó) oszlop, így $i = j$ értéke csak 0 vagy n lehet. 1 pont

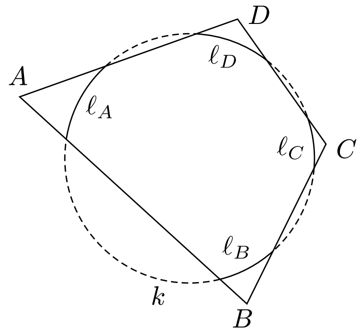
Az így kapott két esetben ugyanannyi megfelelő kiválasztás létezik, hiszen egy olyan kiválasztásnál, ahol a hiányzó érték $i = j = 0$, a különböző sorokból (oszlopokból) *nem* kiválasztott mezők száma éppen $0, 1, \ldots, n - 1$, vagyis a *nem* kiválasztott mezőkre szintén teljesül a feltétel, csak a hiányzó érték az n (és ugyanez megfordítva is igaz.) 1 pont

Vizsgáljuk mondjuk azt az esetet, amikor a kiválasztott mezők száma $1, 2, \ldots, n$ valamilyen sorrendben (a sorokban és az oszlopokban is).

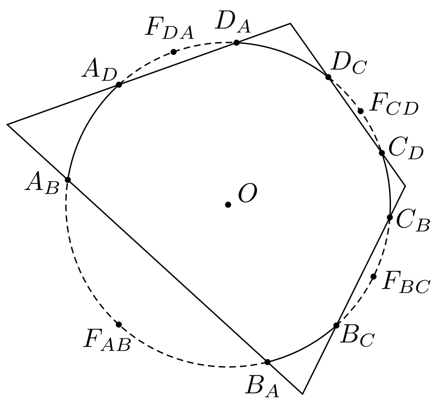
A sorok és az oszlop sorrendjét cserélgetve elérhető, hogy az i. sorban és az i. oszlopban legyen pontosan i kiválasztott mező minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Megmutatjuk n-re vonatkozó teljes indukcióval, hogy ekkor pontosan egyféle jó kiválasztás létezik. Ez $n = 1$-re nyilvánvaló, folytassuk az indukciós lépés igazolásával: tegyük fel, hogy $n = k-1$-ig már igazoltuk az állítást, most belátjuk $n = k$-ra is. A k-adik sorból és a k-adik oszlopból minden mezőt ki kell választanunk. Pontosan akkor kapunk megfelelő kiválasztást, ha az első $k-1$ sor és az első $k-1$ oszlop által meghatározott $(k-1) \times (k-1)$-es táblázat i-edik sorából és oszlopából is pontosan $i-1$ mezőt választunk ki. Az indukciós feltevés szerint ezt pontosan egyféleképpen lehet megtenni (használva korábbi észrevételünket, miszerint ugyanannyi jó kiválasztás van, ha a hiányzó érték a 0, mint ha k). Ezzel az indukciós lépést igazoltuk. 4 pont

Világos, hogy ebben az előbbi esetben ugyanannyi jó kiválasztás van, mint az összes többi sorrend esetében: a soroknál és az oszlopoknál is $n!$ féle sorrend lehetséges, így összesen $(n!)^2$ féle lehetőség van. Tehát a megfelelő kiválasztások száma $2(n!)^2$. 2 pont

3. Tegyük fel, hogy $ABCD$ húrnégyszög, és a k olyan kör, mely a húrnégyszög minden oldalát két pontban metszi. Tekintsük, az ábrán látható módon, az $ABCD$ belsejében létrejövő ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D íveket. Bizonyítsuk be, hogy az ℓ_A és ℓ_C ívek hosszának összege egyenlő az ℓ_B és ℓ_D ívek hosszának összegével.



Megoldás.



Bevezetünk néhány jelölést a megoldás során előforduló pontokra. Az $ABCD$ és k metszéspontjait jelölje A_B, B_A, B_C, C_B, C_D, D_C, D_A, A_D, ahol X_Y az XY oldalon X-hez közelebbi metszéspont. Jelölje továbbá F_{AB}, F_{BC}, F_{CD} és F_{DA} a k kör $ABCD$-n kívüli íveinek felezőpontját. Valamint legyen O a k kör középpontja.

Ezeket a jelöléseket foglaljuk össze az ábrán.

1 pont: ábra, jelölések

Legyen L_A az ℓ_A-t tartalmazó F_{DA}–F_{AB} ív, L_B az ℓ_B-t tartalmazó F_{AB}–F_{BC} ív, L_C az ℓ_C-t tartalmazó F_{BC}–F_{CD} ív, L_D pedig az ℓ_D-t tartalmazó F_{CD}–F_{DA} ív. Mivel az F_{AB}, F_{BC}, F_{CD} és F_{DA} pontok az $ABCD$-n kívüli ívek felezőpontjai, elegendő belátni, hogy az L_A és az L_C ívek hosszösszege egyenlő az L_B és L_D ívek hosszösszegével:

$$|L_A| + |L_C| = |\ell_A| + |\ell_C| + \frac{h}{2}, \quad \text{illetve} \quad |L_B| + |L_D| = |\ell_B| + |\ell_D| + \frac{h}{2},$$

ahol h az $ABCD$-n kívüli ívek hosszösszege. 2 pont: áttérés nagyobb ívekre

Továbbá, ha r a k kör sugara, akkor

$$|L_A| = \frac{2r\pi \cdot F_{DA}OF_{AB}\sphericalangle}{360^\circ},$$
$$|L_B| = \frac{2r\pi \cdot F_{AB}OF_{BC}\sphericalangle}{360^\circ},$$
$$|L_C| = \frac{2r\pi \cdot F_{BC}OF_{CD}\sphericalangle}{360^\circ},$$
$$|L_D| = \frac{2r\pi \cdot F_{CD}OF_{DA}\sphericalangle}{360^\circ},$$

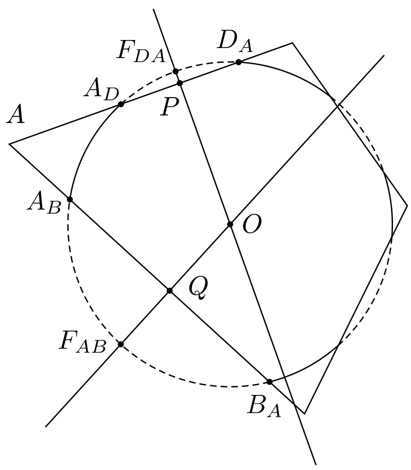
így elegendő a szögekre vonatkozó

$$(*) \qquad F_{DA}OF_{AB}\sphericalangle + F_{BC}OF_{CD}\sphericalangle = F_{AB}OF_{BC}\sphericalangle + F_{CD}OF_{DA}\sphericalangle$$

egyenlőséget belátni. Az $ABCD$ húrnégyszög A-nál, B-nél, C-nél és D-nél levő szögeit rendre α-val, β-val, γ-val és δ-val jelölve állítjuk, hogy

$$F_{DA}OF_{AB}\sphericalangle = 180^\circ - \alpha, \tag{1}$$
$$F_{AB}OF_{BC}\sphericalangle = 180^\circ - \beta, \tag{2}$$
$$F_{BC}OF_{CD}\sphericalangle = 180^\circ - \gamma, \tag{3}$$
$$F_{CD}OF_{DA}\sphericalangle = 180^\circ - \delta. \tag{4}$$

Ekkor a szögekre vonatkozó $(*)$ egyenlőség következni fog abból a húrnégyszögekre vonatkozó ismert tételből, mely szerint $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$. 3 pont: áttérés szögekre



A feladatban kitűzött állítás bizonyításához tehát most már csak az (1)–(4), egyenlőségeket kell igazolnunk, ehhez nyilván elég (1)-et megmutatni, (2)–(4) ugyanúgy következnek. Az OF_{DA} egyenes messe DA-t a P pontban, az OF_{AB} pedig messe AB-t a Q pontban.

Egyelőre tegyük fel, hogy O az $ABCD$ belsejében fekszik.

Mivel OF_{DA} a $D_A A_D$ szakasz szakaszfelező merőlegese, OF_{AB} pedig az $A_B B_A$ szakasz szakaszfelező merőlegese, az $OPAQ$ négyszögben a P és Q csúcsoknál derékszög van. Ekkor

$$F_{DA}OF_{AB}\sphericalangle = POQ\sphericalangle = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha,$$

ezzel (1) bizonyítása kész.

Fontos kiegészítés, hogy az O pont nem szükségszerűen fekszik az $ABCD$ négyszög belsejében. Az általános esetet irányított szögekkel számolva intézhetjük el: az AB irányított egyenes 90°-os elforgatottja az $F_{AB}O$ irányított egyenes, míg az AD irányított egyenes 90°-os elforgatottja az OF_{DA} irányított egyenes. Így az $F_{AB}OF_{DA}$ szög kiegészítő szöge éppen α, amiből (1) nyilván következik.

Ezzel a bizonyítás készen van.

(4 pont: ha a megoldás általában is működik; 2 pont: ha a megoldás csak $ABCD$-beli O-ra működik.)