Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy minden irányban végtelen négyzethálós papírlap mindegyik mezőjébe egy-egy pozitív egész számot kell írnunk a következő feltételekkel:

- Az n szám éppen n-szer forduljon elő (azaz 1 darab 1-es, 2 darab 2-es stb. szerepeljen a lapon).
- Két tetszőleges, közös oldalú mezőbe kerülő számok különbsége kisebb legyen egy előre megadott k számnál.

Mi az a legkisebb egész k, amelyre a kitöltést el lehet végezni? **7 pont**

2. Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. Legyenek A' a BCD, B' az ACD, C' az ABD és D' az ABC háromszög súlypontjai, míg F az AB, G a BC, H a CD és I a DA oldal felezőpontja.

Igazoljuk, hogy a $C'FD'GA'HB'I$ nyolcszög területe az $ABCD$ négyszög területének és az $A'B'C'D'$ négyszög területének mértani közepe! **7 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy a 2018 elemű $H = \{1!; 2!; 3!; \ldots; 2017!; 2018!\}$ halmazból elhagyhatunk két elemet úgy, hogy a megmaradó 2016 darab elem szorzata négyzetszám legyen! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

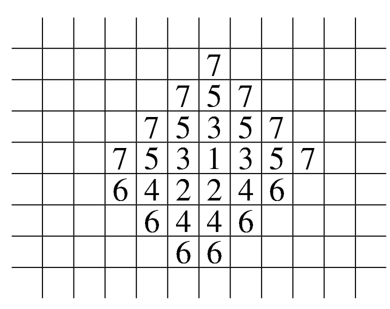
1. Egy minden irányban végtelen négyzethálós papírlap mindegyik mezőjébe egy-egy pozitív egész számot kell írnunk a következő feltételekkel:

- Az n szám éppen n-szer forduljon elő (azaz 1 darab 1-es, 2 darab 2-es stb. szerepeljen a lapon).
- Két tetszőleges, közös oldalú mezőbe kerülő számok különbsége kisebb legyen egy előre megadott k számnál.

Mi az a legkisebb egész k, amelyre a kitöltést el lehet végezni? **7 pont**

Megoldás: Az 1-est tartalmazó mezőnek négy másik mezővel van közös oldala, de csak 2 darab 2-esünk van. Így az 1-es mellé 2-nél nagyobb szám is kerül majd, tehát különbségük legalább 2 lesz, így k legalább 3 lesz. 1 pont

$k = 3$ esetén a kitöltés elvégezhető: A négyzetháló egyik egyenesével a papírlapot két félsíkra osztjuk. Az egyik félsík mezőibe csak páratlan, a másik félsík mezőibe csak páros számokat írunk. Az 1-est és a 2-eseket a határegyenes mentén helyezzük el úgy, hogy az egyik 2-esnek legyen szomszédos oldala az 1-essel és a másik 2-essel is. Az 1-es fölé és mellé 3-asokat írunk, ezek fölé és mellé 5-ösöket és így tovább. Hasonlóan helyezzük el a páros számokat a másik félsíkban.



4 pont

Az egyező számokat tartalmazó ék alakú rétegben mindig kettővel nagyobb számok vannak, mint az előző rétegekben, az egyes rétegekben található számok száma is mindig 2-vel nő. Így ha 1 db 1-esből és 2 db 2-esből indulunk ki, akkor tetszőleges pozitív egész n is éppen n-szer fog előfordulni. 1 pont

A kitöltés módjából következik, hogy egy félsíkon belül közös oldallal rendelkező mezőkben lévő számok különbsége 2 vagy 0. A különböző félsíkokból való, közös oldallal rendelkező mezőkben lévő számok pedig szomszédosak. A leírt kitöltés alapján $k = 3$ a legkisebb szám, melyre el lehet végezni a kitöltést. 1 pont

Összesen: **7 pont**

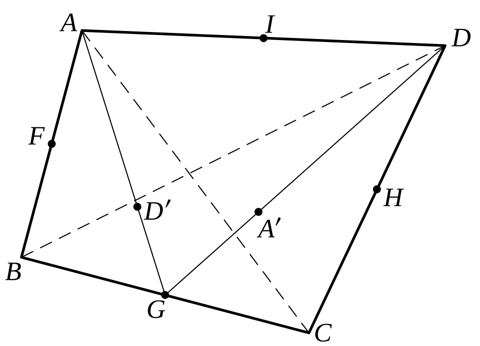
2. Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. Legyenek A' a BCD, B' az ACD, C' az ABD és D' az ABC háromszög súlypontjai, míg F az AB, G a BC, H a CD és I a DA oldal felezőpontja.

Igazoljuk, hogy a $C'FD'GA'HB'I$ nyolcszög területe az $ABCD$ négyszög területének és az $A'B'C'D'$ négyszög területének mértani közepe! **7 pont**

Megoldás: Jelölje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ rendre az A, B, C, D pontok, míg $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{d}'$ rendre az A', B', C', D' pontok helyvektorait! A súlypontokra ismert tétel miatt: $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$, valamint $\mathbf{d}' = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$.

Ekkor $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$, míg $\overrightarrow{A'D'} = \mathbf{d}' - \mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3} - \dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3} = \dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{3} = -\dfrac{\overrightarrow{AD}}{3}$.

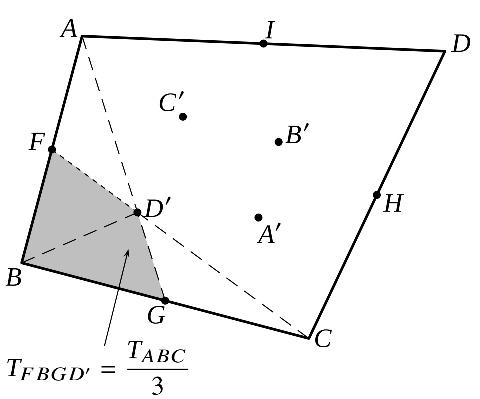
Hasonló igaz az összes többi vesszős és eredeti $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ oldalvektorokra. Azaz az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyszögek egymáshoz hasonlóak, és a hasonlóság aránya: $\lambda = \dfrac{1}{3}$.



Legyen $T_{ABCD} = T$, ekkor $T'_{A'B'C'D} = \dfrac{T}{9}$

(Ez a rész párhuzamos szelők tételével is könnyedén elintézhető: lásd ábra!

Az ABC háromszögben D', míg a BCD háromszögben A' súlypontok, ezért rendre az AG, illetve a DG súlyvonalak G-hez közelebbi harmadolópontjai. De akkor $D'A'$ a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján párhuzamos AD-vel, és harmadolyan hosszú.) 3 pont



A nyolcszög területének meghatározásához tekintsük az ABC háromszöget és ennek D' súlypontját. Legyen $T_{ABC} = t$, ekkor $T_{ABD'} = T_{BCD'} = T_{CAD'} = \dfrac{t}{3}$, mivel D' súlypont. Mivel F, G felezőpontok az AB-n, illetve a BC-n, ezért $T_{FBD'} = T_{BGD'} = \dfrac{t}{6}$, vagyis $T_{FBGD'} = \dfrac{t}{3}$.

Ugyanezt végigjátszva a B csúccsal szemben lévő $(T-t)$ területű CDA háromszöggel és B' súlypontjával kapjuk, hogy $T_{HDIB'} = \dfrac{T-t}{3}$, vagyis $T_{FBGD'} + T_{HDIB'} = \dfrac{T}{3}$.

Hasonlóan $T_{IAFC'} + T_{GCHA'} = \dfrac{T}{3}$.

Mivel éppen azon négy négyszög területét számoltuk, amelyeket az eredeti négyszögből elhagyva a keresett nyolcszöget kapjuk, ezért

$$T_{C'FD'GA'HB'I} = T - 2 \cdot \frac{T}{3} = \frac{T}{3}.$$ 3 pont

Azaz $T_{C'FD'GA'HB'I} = \dfrac{T}{3} = \sqrt{T \cdot \dfrac{T}{9}} = \sqrt{T_{ABCD} \cdot T_{A'B'C'D'}}$ és éppen ezt akartuk igazolni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy a 2018 elemű $H = \{1!; 2!; 3!; \ldots; 2017!; 2018!\}$ halmazból elhagyhatunk két elemet úgy, hogy a megmaradó 2016 darab elem szorzata négyzetszám legyen! **7 pont**

Megoldás: A páros számok faktoriálisait alakítsuk át így:

$$2! = 1! \cdot 2; \quad 4! = 3! \cdot 4; \quad 6! = 5! \cdot 6; \quad \ldots; \quad 2018! = 2017! \cdot 2018$$ 2 pont

Szorozzuk össze a H halmaz elemeit:

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2017! \cdot 2018! = 1! \cdot 1! \cdot 2 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 5! \cdot 5! \cdot 6 \cdot \ldots 2017! \cdot 2017! \cdot 2018 =$$

$$= 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 5! \cdot \ldots 2017! \cdot 2017! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2018 =$$ 1 pont

$$= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2017!)^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1009 =$$ 1 pont

$$= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2017!)^2 \cdot 2^{1009} \cdot 1009! =$$ 1 pont

$$= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2017!)^2 \cdot 2^{1008} \cdot 1009! \cdot 2 =$$

$$= \left(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2017! \cdot 2^{504}\right)^2 \cdot 1009! \cdot 2!$$ 1 pont

Tehát az 1009! és a 2! elhagyása után a H többi elemének szorzata négyzetszám. 1 pont

Összesen: **7 pont**