**Bolyai János**
**Matematikai Társulat**

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

# 2017/2018-as tanév

# 1. forduló

# Kezdők I–II. kategória

## Megoldások és javítási útmutató

**1.** Számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2018}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\ldots-\frac{2}{2018}\right)+\left(-\frac{3}{4}+\ldots-\frac{3}{2018}\right)+\ldots+\left(-\frac{2017}{2018}\right).$$

**6 pont**

**Megoldás:** Rendezzük át az összeget a következőképpen:

$$-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\ldots-\left(\frac{1}{2018}+\frac{2}{2018}+\frac{3}{2018}+\frac{4}{2018}+\ldots+\frac{2017}{2018}\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1+2}{3}-\frac{1+2+3}{4}+\frac{1+2+3+4}{5}+\ldots-\frac{1+2+3+\ldots+2017}{2018}$$ 3 pont

Használjuk az első $n$ természetes szám összegére az $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ összefüggést! 1 pont

Ekkor a keresett összeg:

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}-\frac{3}{2}+\frac{4}{2}-\ldots-\frac{2017}{2}=\frac{1}{2}(-1+2-3+4-\ldots-2017)=\frac{1008-2017}{2}=-\frac{1009}{2}.$$

2 pont

**2.** Az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak hány olyan hételemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege osztható 3-mal? **6 pont**

**Megoldás:** Egy kilencelemű halmazban bármely hételemű részhalmaz és annak kételemű komplementere kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást, ezért a hételemű részhalmazok helyett elegendő a kételemű részhalmazokkal foglalkozni. 2 pont

Mivel az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz elemeinek összege 45, amely 3-mal osztható, így ha egy hételemű részhalmazban az elemek összege osztható 3-mal, akkor a komplementerhalmaz két elemének összege is osztható 3-mal. 1 pont

Két szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindkettő osztható 3-mal, vagy pedig az egyiknek 1, a másiknak 2 a 3-mal való osztási maradéka. Az első esetben a $3, 6, 9$ számok közül háromféleképpen készíthetünk kételemű halmazt; a második esetben az 1 maradékot adó és a 2 maradékot adó szám kiválasztására is 3 lehetőségünk van, így $3 \cdot 3 = 9$-féle részhalmaz készíthető. 2 pont

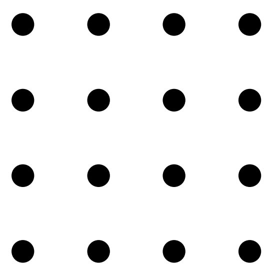
Összesen tehát 12 olyan részhalmaz van, amely megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

**Megjegyzések:**

**1.** Ha a versenyző csak felsorolja a 12 megfelelő részhalmazt, de nem indokolja, hogy miért nincs több, akkor 3 pontot kaphat.

**2.** Hiányos felsorolás esetén a tanulónak nem adható pont!

**3.** Egy $3 \times 3$-as négyzetrács rácspontjait kijelölve az alábbi 16 pontból álló ábrát kaptuk:

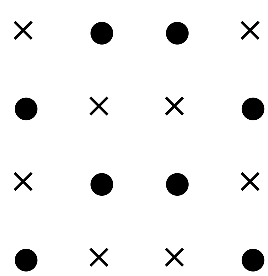


Legfeljebb hány pontot lehet kijelölni a 16 pontból úgy, hogy a pontok közül semelyik három ne essen egy egyenesre? **6 pont**

**Megoldás:**

*a)* Ha $4 \cdot 2 + 1 = 9$ pontot jelölünk ki, akkor a skatulyaelv értelmében pl. a 4 vízszintes helyzetű rácsegyenes valamelyikén lesz 3 olyan pont, amelyek egy rácsvonalra esnek. Így legfeljebb 8 pont jelölhető ki a kívánt feltételeknek megfelelően. 3 pont

*b)* 8 pont kijelölhető a feladat feltételének megfelelően. Az ábra egy ilyen esetet mutat be. (Vigyázni kell arra, hogy nemcsak a rácsegyenesek, hanem az átlós egyenesekre is legfeljebb két-két pont kerülhet!)



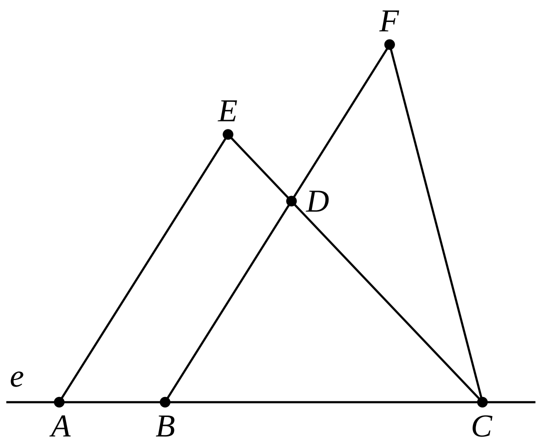
**Megjegyzések:**

**1.** Ha a versenyző csak azt mutatja meg, hogy az általa megadott 8 pontból álló konstrukció tovább nem bővíthető, akkor az első három pontot nem kaphatja meg, azaz összesen legfeljebb 3 pontot kaphat.

**2.** Ha a tanuló konstrukciója hibás, akkor a b) részre nem kaphat pontot.

**4.** Egy $e$ egyenesen felvesszük az $A$, $B$, $C$ pontokat úgy, hogy $AB = 2$, $BC = 6$ és a $B$ pont az $AC$ szakasz belső pontja. Az $e$ egyenes azonos partján az $AC$ és $BC$ szakaszokra olyan $ACE$ és $BCF$ háromszögeket rajzolunk, melyekre $AE = 6$ és $CE = 7$, illetve $BF = 8$ és $CF = 7$. Legyen $D$ a $BF$ és a $CE$ szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg az $ABDE$ négyszög és a $CDF$ háromszög területének arányát! **6 pont**

**Megoldás:**




Az $AC = BF = 8$, $CE = CF = 7$ és $AE = BC = 6$ egyenlőségek alapján az $ACE$ és $BCF$ háromszögek egybevágók, így területük azonos. 3 pont

Mindkét alakzatból elvéve a $BCD$ háromszöget, az $ABDE$ négyszöghöz, illetve a $CDF$ háromszöghöz jutunk. 2 pont

Így ezek területe is azonos, vagyis a keresett területarány $t_{ABDE} : t_{CDF} = 1$. 1 pont