Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2018/2019-es tanév
1. forduló
Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet, ha x és y pozitív egész számok:

$$\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}=\frac{1}{z!} \qquad (n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)$$ **7 pont**

Mivel a szereplő törtek pozitívak, ezért $\frac{1}{x!}<\frac{1}{z!}$, valamint $\frac{1}{y!}<\frac{1}{z!}$. Ebből következik, hogy $x>z$ és $y>z$, tehát $x\geq 2$ és $y\geq 2$. 1 pont

Mivel $x!=x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(z+1)\cdot z!$, ezért $x!\geq 2\cdot z!$, ugyanígy $y!=y\cdot(y-1)\cdot\ldots\cdot(z+1)\cdot z!$, ezért $y!\geq 2\cdot z!$. 2 pont

Ebből következik, hogy $\frac{1}{x!}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z!}$, valamint $\frac{1}{y!}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z!}$, ezeket összeadva $\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}\leq\frac{1}{z!}$. 2 pont

Az egyenlőség csak úgy valósulhat meg ha

$$x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(z+1)=2$$

és

$$y\cdot(y-1)\cdot\ldots\cdot(z+1)=2.$$

Ez csak úgy következhet be, ha a szereplő szorzatok egy tényezőből állnak, és $x=2$, valamint $y=2$, $z+1=2$, azaz $z=1$. 1 pont

Ez a számhármas valóban megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Attila kisöccse megkapta élete első zsebszámológépét. Rögtön elkezdte egymás után összeadni a pozitív egész számokat, és amikor a kijelző már 1000-et mutatott eredményként, büszkén megmutatta Attilának. „Egy számot kihagytál, Öcsi.” – mondta rövid gondolkodás után a báty. Melyik volt ez a szám, ha tudjuk, hogy az öcsi több hibát nem követett el? **7 pont**

Megoldás. Ha n-ig jól adta volna össze a számokat, az összeg $\frac{n(n+1)}{2}$ lett volna. 1 pont

A kihagyott szám legalább 1 és maximum n, így n-re az $1001 \leq \frac{n(n+1)}{2} \leq 1000 + n$ egyenlőtlenség-rendszernek kell teljesülnie. 1 pont

A bal oldali egyenlőtlenséget átalakítva $n^2 + n - 2002 \geq 0$-t kell megoldanunk. A megoldóképletben $\sqrt{8009}$-et kell megbecsülnünk, ez biztosan kevesebb, mint 90, számolással igazolni kell, hogy több, mint 89. 1 pont
(Ez a pont akkor is jár, ha a versenyző függvénytáblázat segítségével helyesen közelíti $\sqrt{8009}$ értékét.)

Így az egyenlőtlenség megoldása $n < -45$ vagy $n > 44$ 1 pont

A jobb oldali egyenlőtlenség átrendezve az $n^2 - n - 2000 \leq 0$ egyenlőtlenséget adja. Ennek megoldása: $-44 \leq n < 46$ 1 pont

(Megjegyzés: Itt nem kell a megoldóképletben szereplő gyök értékére adott becslésre pontot adni, a két azonos elvű megoldásra összesen 1 pont adható.)

Mivel n pozitív egész szám, így az egyenlőtlenség-rendszer egyetlen lehetséges megoldása $n = 45$. 1 pont

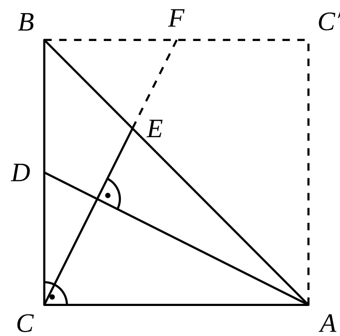
Az első 45 pozitív egész szám összege 1035, így a kihagyott szám a 35 volt. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Amennyiben a versenyző megállapítja, hogy $\frac{44 \cdot 45}{2}$ kevesebb, mint 1000, a $\frac{46 \cdot 47}{2}$ már túl sok, tehát 45 számot adott össze, de nem hivatkozik az $\frac{n \cdot (n+1)}{2} - n$ függvény monotonitására, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

3. Legyen az ABC egyenlő szárú, C-nél derékszögű háromszögben AD súlyvonal. A C-ből AD-re állított merőleges egyenes AB-t az E pontban metszi. Hogyan aránylik az EB szakasz a háromszög átfogójához? **7 pont**

1. megoldás. Tükrözzük a háromszöget az AB átfogóra, legyen C csúcs képe C'. A tükrözés tulajdonságai miatt $ACBC'$ négyszög négyzet. 1 pont



A CE egyenes BC'-vel való metszéspontja legyen F. Mivel $AD \perp CF$, $AC \perp CB$, $CD \perp BF$ és $AC = CB$, ezért az ACD és CBF háromszögek egybevágók (a négyzet középpontja körüli $90°$-os forgatás viszi egyiket a másikba). 2 pont

Vagyis $CD = BF$ miatt F felezőpontja BC'-nek. 1 pont

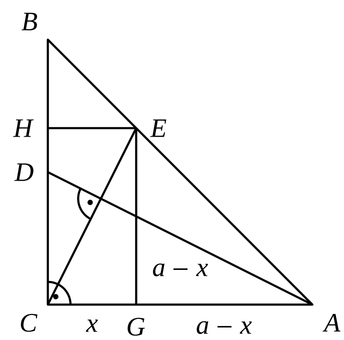
Mivel a CAE és FBE háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak (vagy mert szögeik páronként egyenlők, egy csúcsszögpár és két váltószögpár látható), e két háromszög hasonló, a hasonlóság aránya $CA : FB = 2 : 1$. 2 pont

Így az E pont az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja, azaz a keresett arány $1 : 3$. 1 pont

---

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. A háromszög befogóinak hossza legyen a, és használjuk az ábra jelöléseit! Állítsunk merőlegest E-ből a háromszög befogóira. Legyen $CG = x$, ekkor $AG = a - x$. 1 pont



$GE = a - x$, hiszen AEG háromszög is egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. 1 pont

CGE háromszög hasonló ACD háromszöghöz, mert szögeik merőleges szárú nem tompaszögek, tehát egyenlők. 2 pont

A megfelelő oldalak arányát felírva:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2},$$

ebből $3x = a$. 2 pont

Mivel $HE = x$ és EBH háromszög hasonló ABC háromszöghöz (mindkettő egyenlő szárú és derékszögű), a keresett arány $1 : 3$. 1 pont

---

Összesen: **7 pont**

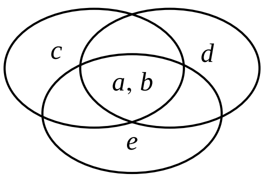
4. A $H = \{a; b; c; d; e\}$ halmaznak hányféleképpen adhatjuk meg három olyan különböző háromelemű részhalmazát, amelyek uniója H? **7 pont**

1. megoldás. Legyen x azoknak a betűknek a száma, amelyek csak egy részhalmaznak elemei, y azoknak a betűknek a száma, amelyek pontosan két részhalmaznak elemei, z azoknak a betűknek a száma, amelyek mindhárom részhalmaznak elemei.

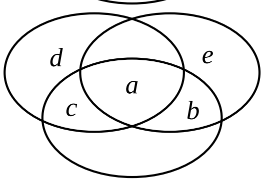
$$x + y + z = 5 \qquad \text{és} \qquad x + 2y + 3z = 9,$$ 1 pont

innen $y + 2z = 4$, azaz három lehetőség van:

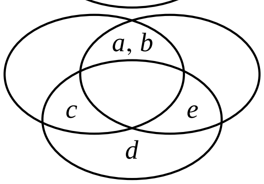
a) $z = 2$, $y = 0$ és $x = 3$ vagy *b)* $z = 1$, $y = 2$ és $x = 2$ vagy *c)* $z = 0$, $y = 4$ és $x = 1$. 2 pont



Az *a)* esetben a lehetőségek száma 10, ennyiféleképpen választható ki az a két elem, amelyik mindhárom halmazban benne van. 1 pont



A *b)* esetben a lehetőségek száma $5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$, mert ötféleképpen választható ki a középre kerülő elem, a maradék négyből hatféleképpen az a kettő, amelyik csak egy halmaznak eleme, és a maradék kettőt a végén kétféleképpen helyezhetjük el. 1 pont



A *c)* esetben a lehetőségek száma $10 \cdot 3 = 30$, mert tízféleképpen választhatjuk ki azt a kettőt, amelyik két halmaznak is eleme, ezután a maradék háromból háromféleképpen azt az egyet, amelyik csak egy részhalmaznak eleme. 1 pont

Az összes lehetőség száma: 100. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. A H halmaznak összesen 10 darab háromelemű részhalmaza van. 1 pont

Ezek közül három különbözőt $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ féleképpen lehet kiválasztani. 1 pont

A kiválasztott három részhalmaz uniója akkor és csak akkor egyenlő a H halmazzal, ha az uniójuk ötelemű. Azt számoljuk ki, hogy a három részhalmaz uniója hány esetben nem lesz ötelemű. Háromelemű halmazok uniója nyilván legalább háromelemű, és ha a halmazok különbözők, akkor az uniójuk legalább négyelemű. Tehát a három kiválasztott részhalmaz uniója pontosan akkor nem egyezik meg a H halmazzal, ha ez az unió négyelemű, azaz ha a három részhalmazt a H halmaz valamelyik négyelemű részhalmának elemeiből állítjuk elő. 2 pont

A H halmaznak összesen öt négyelemű részhalmaza van, és ezek mindegyikének négy háromelemű részhalmaza van. 1 pont

Bármely négyelemű részhalmaz esetén az adott részhalmaz négy háromelemű részhalmaza közül négyféleképpen lehet kiválasztani hármat. 1 pont

Ezért összesen $5 \cdot 4 = 20$-féleképpen lehet úgy kiválasztani három háromelemű részhalmazt, hogy az uniójuk csak négy elemű legyen, azaz ne legyen egyenlő H-val, tehát $120 - 20 = 100$ esetben lesz egyenlő a kiválasztott részhalmazok uniója H-val. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Laja a lajhár hosszú – 1 órás – vándorútra indul az amazonasi fák tetején. Lajának kezdetben 100 „energiája" van, és minden perc során két lehetőség közül választhat:

- vagy egy percre megáll és megeszik egy papaya-gyümölcsöt, így 1-gyel növeli az energiáját,
- vagy az adott perc során teljes erőbedobással mászik; ekkor pontosan annyi cm-t tesz meg, amennyi az energiája, de a perc végére 1-gyel csökken az energiája.

Milyen messzire juthat Laja egy óra alatt, és mit kell ehhez tennie? **7 pont**

1. megoldás. Nincs értelme annak, hogy Laja az egyik percben mászik, és a következő percben pihen, mert a két perc során felcserélve a cselekvéseket 1 cm-rel messzebb jutna, és a második időpontokban ugyanannyi lenne az energiája a két esetnél. Emiatt Laja akkor juthat a legmesszebbre, ha az elején egy ideig – mondjuk t percig – pihen, majd végig mászik.
(*Ez a gondolat valamilyen formában.*) 2 pont

Ekkor a t-től függő megtett távolság:

$$s(t) = \overbrace{0+0+\ldots+0}^{t\ \text{db}} + (100+t) + \overbrace{(100+t-1)+\ldots+(100+t-(59-t))}^{59-t\ \text{db}}$$ 1 pont

$$s(t) = (60-t)(100+t) - (1+2+\ldots+(59-t)) =$$

$$= (60-t)(100+t) - \frac{(60-t)(59-t)}{2} = \frac{(60-t)(200+2t-59+t)}{2}$$ 1 pont

$$s(t) = \frac{(60-t)(141+3t)}{2} = \frac{-3t^2+39t+8460}{2} = \frac{-3\,(t-6,5)^2+8586,75}{2}$$

($s(t)$ *szorzat alakja/számtani-mértani közép is használható*) 1 pont

$s(t)$ maximuma nyilván $t=6$-nál vagy $t=7$-nél lehet, mindkettő esetén $s(6)=s(7)=4293$ cm a megtett távolság. 1 pont

Azaz Laja 4293 cm-t tehet meg, és ehhez 6 vagy 7 percet kell az elején pihennie. 1 pont

2. megoldás. Nincs értelme annak, hogy Laja az egyik percben mászik, és a következő percben pihen, mert a két perc során felcserélve a cselekvéseket 1 cm-rel messzebb jutna, és a második időpontokban ugyanannyi lenne az energiája a két esetnél. Emiatt Laja akkor juthat a legmesszebbre, ha az elején egy ideig – mondjuk t percig – pihen, majd végig mászik.
(*Ez a gondolat valamilyen formában.*) 2 pont

Nézzük meg, hogy mi történik, ha t, illetve ha $(t+1)$ percig pihenünk!

Az első esetben a megtett távolság (összegként):

$$s(t) = \overbrace{0+0+\ldots+0}^{t\ \text{db}} +$$

$$+\overbrace{(100+t)+(100+t-1)+\ldots+(100+t-(57-t))+\Big[(100+t-(58-t))+(100+t-(59-t))\Big]}^{60-t\ \text{db}}$$

A második esetben pedig:

$$s(t+1) = \overbrace{0+0+\ldots+0}^{t \text{ db}} + 0 + (100+t+1) +$$
$$+ \overbrace{(100+t) + (100+t-1) + \ldots + (100+t-(57-t))}^{58-t \text{ db}} \qquad 1 \text{ pont}$$

1 plusz perc pihenés a képlet „elején” hozzáad $(100+t+1)$ cm-t, de elvesz a „végén”

$$(100+t-(58-t)) + (100+t-(59-t)) = (42+2t) + (41+2t) = 83+4t \text{ cm-t.} \qquad 2 \text{ pont}$$

Addig kell „várni”, amíg $s(t) < s(t+1)$ teljesül, azaz t akkor „jó”, ha erre a különbségre már:

$$101+t \le 83+4t \to 18 \le 3t \to 6 \le t$$

(és $t = 6$-ra $s(6) = s(7)$ persze). 1 pont

Ellenőrzés: az $s(6) = s(7)$ esetet végigszámolva:

$s(6) = 0+0+0+0+0+0+106+105+\ldots+53 = \dfrac{54 \cdot (106+53)}{2} = 4293$, illetve

$s(7) = 0+0+0+0+0+0+0+107+106+\ldots+55 = \dfrac{53 \cdot (107+55)}{2} = 4293$ adódik.

Azaz Laja 4293 cm-t tehet meg, és ehhez 6 vagy 7 percet kell az elején pihennie. 1 pont

Összesen: **7 pont**