Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2018/2019-es tanév
2. forduló
Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az $n + S(n) = 2031$ egyenletet, ahol $S(n)$ az n természetes szám számjegyeinek összegét jelenti. **7 pont**

Megoldás. $S(n) \leqslant 1 + 9 + 9 + 9 = 28$, így $n \geqslant 2031 - 28 = 2003$. 1 pont

A keresett szám legalább négyjegyű, mert egy háromjegyű számhoz hozzáadva a számjegyei összegét legfeljebb 1026-ot kapunk. 1 pont

A 2000-nél kisebb négyjegyű számok közül az 1999-nek a legnagyobb a számjegyösszege, a 2000-nél nagyobb vagy egyenlő de 2031-nél kisebb vagy egyenlő számok közül pedig a 2029-nek, tehát $2003 \leqslant n \leqslant 2031$. 1 pont

Egy egész szám 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint a számjegyeinek összege. Mivel 2031 9-cel osztva 6-ot ad maradékul, n és $S(n)$ 9-cel osztva csak 3 maradékot adhat. 2 pont

2003 és 2026 között három ilyen szám van: 2010, 2019 és 2028. 1 pont

Ellenőrizve: $2010 + 3 = 2013$, $2028 + 12 = 2040$, nem ad megoldást, $2019 + 12 = 2031$, ami megfelelő.

Az egyenlet megoldása $n = 2019$. 1 pont

Megjegyzés. Amennyiben a versenyző helyes módszerrel ésszerű határok közé szorítja a megoldást, akkor ezért legfeljebb 3 pontot kaphat. Ha ezen határok között az összes számot követhetően ellenőrzi és megtalálja a helyes megoldást, akkor megkaphatja a további 4 pontot. Amennyiben nem ellenőrzi a számokat, akkor a második részre legfeljebb 1 pontot kaphat!

Összesen: **7 pont**

2. Egy számsorozat első eleme $b_1 = 5$, valamint minden 1-nél nagyobb indexre az n-edik eleme $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$, ahol $a_i = 3(i-1) + 1$.

a) Igazoljuk, hogy b_n-nek végtelen sok 7-tel osztható eleme van.

b) Mennyi b_{100} értéke? **7 pont**

Megoldás. *a)* Képezzük a megadott rekurzió szerint a sorozat b_n elemét: $b_n = b_{n-1} + a_{n-1} = (b_{n-2} + a_{n-2}) + a_{n-1} = (b_{n-3} + a_{n-3}) + a_{n-2} + a_{n-1} = (b_{n-4} + a_{n-4}) + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} = \ldots = b_1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. 2 pont

Tudjuk, hogy $b_1 = 5$, valamint, hogy $a_1 = 1$ és $a_i = 3i - 2$. Így az a sorozat bármely két egymást követő elemének különbsége 3, valamint az első eleme 1, utolsó pedig $a_{n-1} = 3n - 5$. Összesen $n - 1$ elemünk van. 1 pont

Összeadva a tagokat $\dfrac{1 + (3n-5)}{2}(n-1)$ adódik.

Ebből következik, hogy $b_n = 5 + \dfrac{1 + (3n-5)}{2}(n-1) = \dfrac{3n^2 - 7n + 14}{2}$. 2 pont

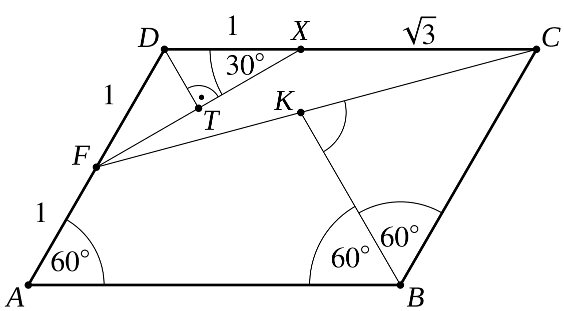
A képletből látszik, hogy $n = 7k$ ($k = 1, 2, \ldots$) számokra 7-tel osztható tagot kapunk. 1 pont

b) Az előző képletbe behelyettesítve $b_{100} = 5 + \dfrac{3 \cdot 100 - 4}{2} \cdot 99 = 14\,657$ adódik. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az $ABCD$ paralelogrammában $DAB\sphericalangle = 60^\circ$, $AB = \sqrt{3} + 1$, $BC = 2$. A DA oldal F felezőpontját és a C csúcsot összekötő szakaszt a B csúcsból induló szögfelező a K pontban metszi. Határozzuk meg a $CKB\sphericalangle$ nagyságát. **7 pont**

Megoldás. Legyen X a CD oldal azon pontja, amelyre $DX = 1$ és $XC = \sqrt{3}$. 2 pont



Mivel a paralelogramma egy oldalon fekvő szögeinek összege 180°, ezért $FDX\sphericalangle = 120^\circ$.

Az FXD egyenlő szárú háromszöget a DT magassága két egybevágó félszabályos háromszögre bontja, és $FT = TX = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 1 pont

Így $FX = \sqrt{3}$ és az FCX háromszög egyenlő szárú. 1 pont

Szögei $CXF\sphericalangle = 180^\circ - FXD\sphericalangle = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ és

$$XFC\sphericalangle = FCX\sphericalangle = \frac{180^\circ - CXF\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$ 1 pont

Ezt felhasználva $BCK\sphericalangle = BCD\sphericalangle - FCX\sphericalangle = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ és 1 pont

$$CKB\sphericalangle = 180^\circ - KBC\sphericalangle - BCK\sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

Tehát a keresett szög 75°-os. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Egy kör kerülete mentén felsoroljuk egy hatelemű halmaz összes részhalmazát, majd egy-egy szakasszal összekötjük azokat, amelyeknek van közös elemük. Egy halmazt önmagával természetesen nem köt össze szakasz. Hány összekötő szakaszt kapunk? **7 pont**

1. megoldás. Először érdemes meghatározni, hogy egy adott részhalmaz hány másikkal nem lesz összekötve. Bármely részhalmaz a komplementerének részhalmazaival nincs összekötve.

Az egyelemű halmaz az ötelemű komplementerének a 32 részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 32 = 31$-gyel igen, így a hat darab egyelemű halmazból összesen $6 \cdot 31 = 186$ szakasz indul ki. 1 pont

A 15 darab kételemű részhalmaz mindegyike a négyelemű komplementerének a 16 darab részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 16 = 47$ részhalmazzal össze van kötve, így a kételeműekből összesen $15 \cdot 47 = 705$ szakasz indul ki. 1 pont

A 20 darab háromelemű részhalmaz mindegyike a háromelemű komplementerének a 8 darab részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 8 = 55$ részhalmazzal össze van kötve, így a háromeleműekből összesen $20 \cdot 55 = 1100$ szakasz indul ki. 1 pont

A 15 darab négyelemű részhalmaz mindegyike a kételemű komplementerének a 4 darab részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 4 = 59$ részhalmazzal össze van kötve, így a négyeleműekből összesen $15 \cdot 59 = 885$ szakasz indul ki. 1 pont

A 6 darab ötelemű részhalmaz mindegyike az egyelemű komplementerének a 2 darab részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 2 = 61$ részhalmazzal össze van kötve, így az öteleműekből összesen $6 \cdot 61 = 366$ szakasz indul ki. 1 pont

A hatelemű halmazból az üreshalmazba nem megy szakasz, a többi $63 - 1 = 62$-be igen. 1 pont

Így eddig minden szakaszt kétszer vettünk számba, ezért a szakaszok száma:

$$(186 + 705 + 1100 + 885 + 366 + 62) : 2 = 1652.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. A hatvannégy részhalmaz között összesen $(64 \cdot 63) : 2 = 2016$ darab szakasz húzható. 1 pont

Színezzük kékre azokat, amelyek közös elemmel rendelkező halmazokat kötnek össze, és pirosra azokat, amelyek közös elem nélkülieket kötnek össze. A kék szakaszok száma a kérdés. Ha kiszámítjuk a piros szakaszok számát, és ezt levonjuk a 2016-ból, megkapjuk a feladat megoldását.

Az üres halmaz a 63 másik részhalmaz mindegyikével diszjunkt, ebből 63 piros szakasz megy ki.

Az egyelemű halmazok (ebből 6 darab van) az ötelemű komplementereik 32 részhalmazával diszjunktak, így az egyeleműekből összesen $6 \cdot 32 = 192$ piros szakasz indul ki.

A kételemű halmazok (ezekből 15 darab van) a négyelemű komplementereik 16 részhalmazával diszjunktak, így ezekből összesen $15 \cdot 16 = 240$ piros szakasz indul ki. 1 pont

Hasonlóan: a háromeleműekből összesen $20 \cdot 8 = 160$ piros szakasz, 1 pont

a négyeleműekből $15 \cdot 4 = 60$ piros szakasz, 1 pont

az öteleműekből $6 \cdot 2 = 12$ piros szakasz, 1 pont

a hateleműből 1 piros szakasz indul. 1 pont

Ezért a piros szakaszok száma $(63 + 6 \cdot 32 + 15 \cdot 16 + 20 \cdot 8 + 15 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 1) : 2 = 364$, a kék szakaszoké pedig $2016 - 364 = 1652$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. megoldás. A hatvannégy részhalmaz összesen $(64 \cdot 63) : 2 = 2016$ darab halmazpárt határoz meg. 2 pont

A diszjunkt halmazpárok száma a következő módon is kiszámítható:

Ha két diszjunkt A és B halmazt akarunk készíteni a hatelemű halmaz elemeiből, akkor sorban mind a hat elemről eldönthetjük, hogy az A halmazba vagy a B halmazba vagy egyikbe se tesszük bele. Ez $3^6 = 729$ lehetőség. Így az üres halmazt kivéve mindegyik diszjunkt párt (rendezetlen párokat kell számba venni) duplán számoltuk, mivel A és B szerepe felcserélhető. Ezért a diszjunkt párok száma: $(729 - 1) : 2 = 364$. 4 pont

A közös elemmel rendelkező párok száma: 1652. 1 pont

Összesen: **7 pont**