Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2018/2019-es tanév
Kezdők II. kategória
3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyenek x, y olyan valós számok, amelyekre $xy = 3$ és $x \neq y$. Határozzuk meg azt a legnagyobb c valós számot, amelyre minden megfelelő x, y érték esetén fennáll – de nála nagyobbakra már nem –, hogy

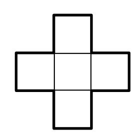
$$\frac{\left[(x+y)^2 - 10\right]\left[(x-y)^2 + 8\right]}{(x-y)^2} \geqslant c.$$

Ezen maximális c érték mellett adjuk meg az egyenlőséget biztosító $(x; y)$ számpárokat. **10 pont**

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $CDA\sphericalangle = 135^\circ$, $BDA\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 2DAB\sphericalangle = 4DBC\sphericalangle$ és $BC = \sqrt{2}CD$. Igazoljuk, hogy $AB = AD + BC$. **10 pont**

3. Egy 7×7-es tábla 4 sarokmezőjét eltávolítjuk, és a megmaradt kis négyzetek közül néhányat befestünk feketére.

a) Elérhető-e 7 mező feketére színezésével az, hogy a táblán ne maradjon teljesen fehér, kereszt alakú pentominó? (A kereszt alakú pentominó öt egybevágó kis négyzetből áll, és az alakja az ábrán látható.)



b) Biztosítható-e ugyanez, ha csak 6 mezőt festünk be feketére?

c) Igazoljuk, hogy a tábla mezőibe elhelyezhetünk egész számokat úgy, hogy bármely kereszt alakú pentominóban a számok összege negatív, míg az egész táblán szereplő számok összege pozitív. **10 pont**