Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyenek x, y olyan valós számok, amelyekre $xy = 3$ és $x \neq y$. Határozzuk meg azt a legnagyobb c valós számot, amelyre minden megfelelő x, y érték esetén fennáll – de nála nagyobbakra már nem –, hogy

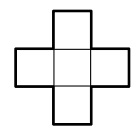
$$\frac{\left[(x+y)^2-10\right]\left[(x-y)^2+8\right]}{(x-y)^2} \geqslant c.$$

Ezen maximális c érték mellett adjuk meg az egyenlőséget biztosító $(x; y)$ számpárokat. **10 pont**

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $CDA\sphericalangle = 135°$, $BDA\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 2DAB\sphericalangle = 4DBC\sphericalangle$ és $BC = \sqrt{2}CD$. Igazoljuk, hogy $AB = AD + BC$. **10 pont**

3. Egy 7×7-es tábla 4 sarokmezőjét eltávolítjuk, és a megmaradt kis négyzetek közül néhányat befestünk feketére.

a) Elérhető-e 7 mező feketére színezésével az, hogy a táblán ne maradjon teljesen fehér, kereszt alakú pentominó? (A kereszt alakú pentominó öt egybevágó kis négyzetből áll, és az alakja az ábrán látható.)



b) Biztosítható-e ugyanez, ha csak 6 mezőt festünk be feketére?

c) Igazoljuk, hogy a tábla mezőibe elhelyezhetünk egész számokat úgy, hogy bármely kereszt alakú pentominóban a számok összege negatív, míg az egész táblán szereplő számok összege pozitív. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyenek x, y olyan valós számok, amelyekre $xy = 3$ és $x \neq y$. Határozzuk meg azt a legnagyobb c valós számot, amelyre minden megfelelő x, y érték esetén fennáll – de nála nagyobbakra már nem –, hogy

$$\frac{\left[(x+y)^2-10\right]\left[(x-y)^2+8\right]}{(x-y)^2} \geqslant c.$$

Ezen maximális c érték mellett adjuk meg az egyenlőséget biztosító $(x; y)$ számpárokat. **10 pont**

Megoldás.

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = (x-y)^2 + 12$$ 1 pont

A helyettesítést végrehajtva és bevezetve a $(x-y)^2 = z > 0$ jelölést

$$\frac{\left[(x+y)^2-10\right]\left[(x-y)^2+8\right]}{(x-y)^2} = \frac{(z+2)(z+8)}{z} = \frac{z^2+10z+16}{z} = z+10+\frac{16}{z} = 10+4\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)$$ 3 pont

Mivel egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, ezért $10 + 4 \cdot \left(\frac{4}{z} + \frac{z}{4}\right) \geqslant 18$, tehát c értéke legalább 18. 2 pont

Az egyenlőség feltétele $\frac{z}{4} = \frac{4}{z}$, amiből a $z > 0$ feltétel alapján $z = 0$ adódik. 1 pont

$z = 4$ esetén $(x-y)^2 = 4$ és $(x+y)^2 = 16$, amiből $x - y$ értéke ± 2, $x + y$ értéke pedig ± 4 lehet. 1 pont

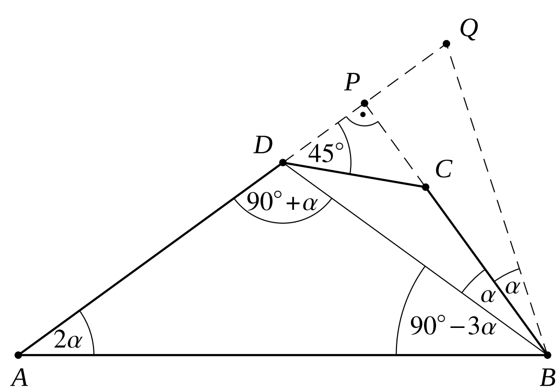
Az összes lehetséges párosítást figyelembe véve az egyenletrendszerek megoldásaként a $c = 18$-as értékhez az alábbi $(x; y)$ számpárok tartozhatnak: $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $(1; 3)$, $(-1; -3)$. 2 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $CDA\sphericalangle = 135°$, $BDA\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 2DAB\sphericalangle = 4DBC\sphericalangle$ és $BC = \sqrt{2}CD$. Igazoljuk, hogy $AB = AD + BC$. **10 pont**

Megoldás. Vezessük be a $DBC\sphericalangle = \alpha$ jelölést.

Ekkor a feladat feltételei alapján $DAB\sphericalangle = 2\alpha$, $BDA\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 4\alpha$. 1 pont



Másrészt az ABD háromszögből $BDA\sphericalangle + ABD\sphericalangle = 180° - 2\alpha$.

Az utóbbi két egyenlőség alapján $BDA\sphericalangle = 90° + \alpha$, $ABD\sphericalangle = 90° - 3\alpha$ 2 pont

és $DAB\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 90°$. 1 pont

Legyen P az AD és BC oldalegyenesek metszéspontja. Ekkor az ABP háromszög P csúcsnál levő szöge 90°-os, 1 pont

és a PDC egyenlő szárú derékszögű háromszög, amiből

$$PD = \frac{\sqrt{2}}{2}CD = \frac{BC}{2}.$$ 1 pont

Legyen Q a D pont P-re vonatkozó tükörképe. Ekkor $DQ = 2PD = BC$. 1 pont

Mivel a PBD és PBQ háromszögek tükrösek a PB egyenesre nézve, ezért

$$CBQ\sphericalangle = CBD\sphericalangle = \alpha, \quad ABQ\sphericalangle = 90° - 3\alpha + \alpha + \alpha = 90° - \alpha,$$

és az ABQ háromszögben $AQB\sphericalangle = 180° - 2\alpha - (90° - \alpha) = 90° - \alpha$.

Tehát az ABQ háromszög egyenlő szárú, 2 pont

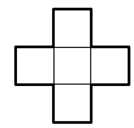
és $AB = AQ = AD + DQ = AD + BC$. 1 pont

Ezzel az állítást igazoltuk.

Összesen: **10 pont**

3. Egy 7×7-es tábla 4 sarokmezőjét eltávolítjuk, és a megmaradt kis négyzetek közül néhányat befestünk feketére.

a) Elérhető-e 7 mező feketére színezésével az, hogy a táblán ne maradjon teljesen fehér, kereszt alakú pentominó? (A kereszt alakú pentominó öt egybevágó kis négyzetből áll, és az alakja az ábrán látható.)

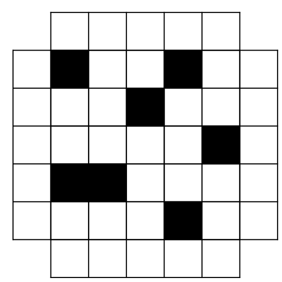


b) Biztosítható-e ugyanez, ha csak 6 mezőt festünk be feketére?

c) Igazoljuk, hogy a tábla mezőibe elhelyezhetünk egész számokat úgy, hogy bármely kereszt alakú pentominóban a számok összege negatív, míg az egész táblán szereplő számok összege pozitív. **10 pont**

Megoldás. *a)* Jelölje az i-edik sor, j-edik oszlop kis négyzetét $(i; j)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 7, i, j \in \mathbb{N}^+)$.

7 fekete mezővel teljesíthető a feladat feltétele. Például egy lehetőség a $(2; 5)$, $(3; 2)$, $(3; 3)$, $(4; 6)$, $(5; 4)$, $(6; 2)$, $(6; 5)$ mezők feketére festése (1. ábra). 2 pont

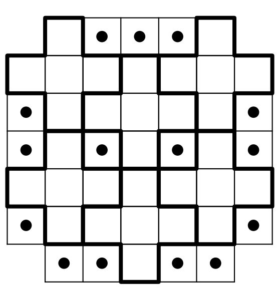


1. ábra

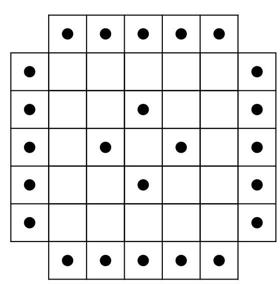
b) Ezután tegyük fel, hogy 6 kis négyzet kiszínezésével teljesíthetők a feladat feltételei.

A 2. ábra szerint a tábla $(2; 2)$, $(2; 6)$, $(3; 4)$, $(5; 2)$, $(5; 6)$, $(6; 4)$ centrumú keresztjei páronként diszjunktak, ezért ha nem akarjuk, hogy ezek közül bármelyik is fehér maradjon, akkor minden keresztben pontosan egy mezőt feketére kell színezni, és a ponttal jelzett részeknek fehéren kell maradniuk.

A 2. ábrát az óramutató járásának megfelelően 90°, 180°, 270°-kal elforgatva, és a festés szempontjából kitiltott mezőket megjelölve és összesítve a 3. ábrát kapjuk.



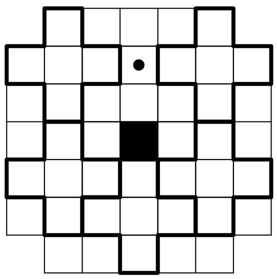
2. ábra.



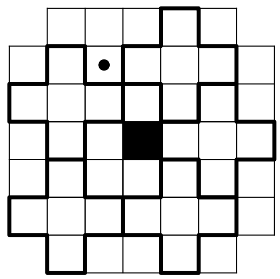
3. ábra.

Ekkor a készült rajz alapján látható, hogy a $(4; 4)$ mezőt kötelező befestenünk feketére, mert különben a $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(4; 4)$, $(4; 5)$, $(5; 4)$ mezők fehér keresztet alkotnának. 2 pont

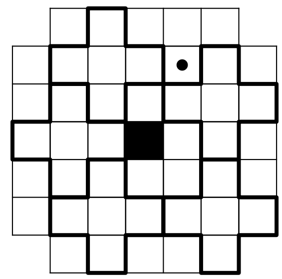
A 4–6. ábrák szerint kialakítva a kereszteket, a 6 fekete négyzet kialakítása és a középső négyzet kötelező befestése mellett mind az 5 diszjunkt keresztbe pontosan egy fekete négyzetnek kell kerülnie. Így a $(2;4)$, $(2;3)$ és $(2;5)$ mezőknek fehérnek kell maradnia.



4. ábra.



5. ábra.



6. ábra.

Viszont ekkor az $(1;4)$, $(2;3)$, $(2;4)$, $(2;5)$, $(3;4)$ mezőkből álló kereszt fehér maradna, ami ellentmondás.

Tehát a tábla megfelelő színezéséhez nem elegendő 6 fekete négyzet. 3 pont

c) Írjunk az *a)* esetnél felsorolt 7 fekete mező mindegyikébe (-5)-öt, a többi kis négyzetbe pedig 1-et. Ekkor minden keresztbe 1 vagy 2 fekete mező jut, így a számok összege $-5+4=-1$ vagy $2\cdot(-5)+3=-7$ lesz.

A táblán levő összes szám pedig összeadva $7\cdot(-5)+38=3$-at ad eredményül. Tehát a feladat feltétele teljesül. 3 pont

Összesen: **10 pont**