Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg az összes olyan b (1-nél nagyobb) természetes számot, amelyre teljesül, hogy minden nem egész, véges tizedes tört alakban felírható pozitív valós szám b alapú számrendszerbeli „b-edes tört” alakja végtelen szakaszos. **10 pont**

2. Mely $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényekre igaz, hogy tetszőleges x, y egész számokra

$$f(x + f(y)) = f(x) + y?$$

10 pont

3. Tekintsük a síkon az $ABCD$ négyszöget, és egy olyan P pontot, amely nincs rajta $ABCD$ semelyik oldal- vagy átlóegyenesén! Az $ABCD$ négyszöget a P pontra tükrözve az $A_1B_1C_1D_1$ négyszöget kapjuk. Tudjuk, hogy az A_1, B, C, D pontok, az A, B_1, C, D pontok, illetve az A, B, C_1, D pontok egy-egy körön helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C, D_1 pontok is egy körre illeszkednek! **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az összes olyan b (1-nél nagyobb) természetes számot, amelyre teljesül, hogy minden nem egész, véges tizedes tört alakban felírható pozitív valós szám b alapú számrendszerbeli „b-edes tört” alakja végtelen szakaszos. **10 pont**

1.. megoldás. Minden véges tizedes tört felírható közönséges tört alakban. Legyen egy tetszőleges véges tizedes tört közönséges tört alakja $\frac{p}{q}$, ahol $q \neq 1$, $(p, q) = 1$. 1 pont

Mivel a szám tizedes tört alakja véges, van valamilyen $k \in N$, amelyre $10^k \cdot \frac{p}{q} \in N$. 1 pont

Tekintettel arra, hogy $(p, q) = 1$, ez csak úgy lehet, ha $q \mid 10^k$. 1 pont

Eszerint q prímtényezős felbontásában 2-es és 5-ös prímtényezőn kívül más nem szerepelhet. 1 pont

Ha $\frac{p}{q}$-t átírjuk „b-edes tört” alakba, akkor (mivel nyilván ott sem lehet egész) vagy véges, vagy végtelen szakaszos törtet kaphatunk. 1 pont

Véges abban az esetben lehetne, ha valamilyen n-re $b^n \cdot \frac{p}{q}$ egész szám lenne, azaz $q \mid b^n$ lenne. Mivel azonban a szám „b-edes tört” alakja nem véges, így $q \nmid b^n$ (bárhogyan is választjuk meg az n-et). 2 pont

Akkor tudjuk garantálni, hogy b semelyik hatványa sem többszöröse semelyik lehetséges q-nak, ha b prímtényezős felbontásában nem szerepel sem a 2, sem az 5 prímtényező, vagyis $(b, 10) = 1$. 2 pont

Minden más b megfelel, mert bárhogyan választjuk is meg q-t, a prímtényezős felírásában csak 2 és 5 szerepelhet, így ha ezek a prímtényezők nem szerepelnek a b felírásában, akkor b nem lehet többszöröse semelyik q-nak, vagyis a szám b-edes tört alakja csak végtelen szakaszos lehet. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Egy racionális szám n alapú számrendszerben vagy véges, vagy végtelen szakaszos n-edes tört. 2 pont

Akkor és csak akkor véges a $\frac{p}{q}$ tört (ahol $(p, q) = 1$, $q \neq 1$) n-edes alakja, ha q prímtényezői n prímtényezői közül kerülnek ki. 2 pont

A feladat feltételei alapján minden véges tizedes tört végtelen b-edes, és minden véges b-edes tört végtelen tizedes. 4 pont

Ez azt jelenti, hogy a feladatnak azok és csak azok a $b > 1$ természetes számok tesznek eleget, amelyekre $(10, b) = 1$. 2 pont

Összesen: **10 pont**

2. Mely $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényekre igaz, hogy tetszőleges x, y egész számokra

$$f(x + f(y)) = f(x) + y?$$

10 pont

Megoldás. Bevezetünk egy jelölést az eredeti egyenletre:
$$f(x + f(y)) = f(x) + y \tag{$*$}$$
Tetszőleges $x, y, y' \in \mathbb{Z}$-re ha $f(y) = f(y')$, akkor $(*)$ szerint
$$f(x) + y = f(x + f(y)) = f(x + f(y')) = f(x) + y', \quad \text{így } y = y',$$
tehát f injektív. 1 pont

Ekkor $(*)$-ba $x = y = 0$-t írva
$$f(f(0)) = f(0),$$
vagyis mivel f injektív, $f(0) = 0$. 1 pont

Ezután $(*)$-ba $x = 0$-t írva
$$f(f(y)) = y \tag{1}$$
(azaz f involutív). 1 pont

Most $(*)$-ban x helyére $f(x)$-et írva, és (1)-et kétszer használva
$$f(f(x) + f(y)) = f(f(x)) + y = x + y = f(f(x + y)),$$
így az injektivitás miatt
$$f(x) + f(y) = f(x + y) \tag{2}$$
(azaz f additív). 2 pont

Bebizonyítjuk, hogy a (2) egyenlet megoldásai az $f(x) = f(1) \cdot x$ alakú lineáris függvények (azaz $f(1)$ meghatározza a függvényt). Ez teljes indukcióval világos a nemnegatív egészekre: $f(x) = f(1) \cdot x$ nyilván fennáll $x = 0$-ra és $x = 1$-re, valamint (2) az $y = 1$ helyettesítéssel
$$f(x + 1) = f(x) + f(1) = f(1) \cdot x + f(1) \cdot 1 = f(1) \cdot (x + 1);$$
majd negatív számokra is megkapjuk, ha (2)-ben az $y = -x$ helyettesítéssel élünk:
$$f(x) + f(-x) = f(0) = 0,$$
tehát ha $f(x) = f(1) \cdot x$, akkor $f(-x) = f(1) \cdot (-x)$. 2 pont

Ekkor (1) szerint minden $x \in \mathbb{Z}$-re
$$x = f(f(x)) = f(1)^2 \cdot x,$$
azaz $f(1) = \pm 1$. 1 pont

Az $f(x) = \pm x$ függvények jók is, hiszen $(*)$ $f(x) = x$ esetén az
$$x + y = x + y,$$
míg $f(x) = -x$ esetén az
$$y - x = y - x$$
alakot ölti. 2 pont

Összesen: **10 pont**

3. Tekintsük a síkon az $ABCD$ négyszöget, és egy olyan P pontot, amely nincs rajta $ABCD$ semelyik oldal- vagy átlóegyenesén! Az $ABCD$ négyszöget a P pontra tükrözve az $A_1B_1C_1D_1$ négyszöget kapjuk. Tudjuk, hogy az A_1, B, C, D pontok, az A, B_1, C, D pontok, illetve az A, B, C_1, D pontok egy-egy körön helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C, D_1 pontok is egy körre illeszkednek! **10 pont**

Megoldás. A megoldás során végig irányított szögekkel számolunk, mod 180°:

$$BAC\sphericalangle = BAC_1\sphericalangle - CAB_1\sphericalangle - B_1AC_1\sphericalangle \qquad \text{1 pont}$$

A P-re vonatkozó szimmetria miatt $B_1AC_1\sphericalangle = BA_1C\sphericalangle$, tehát

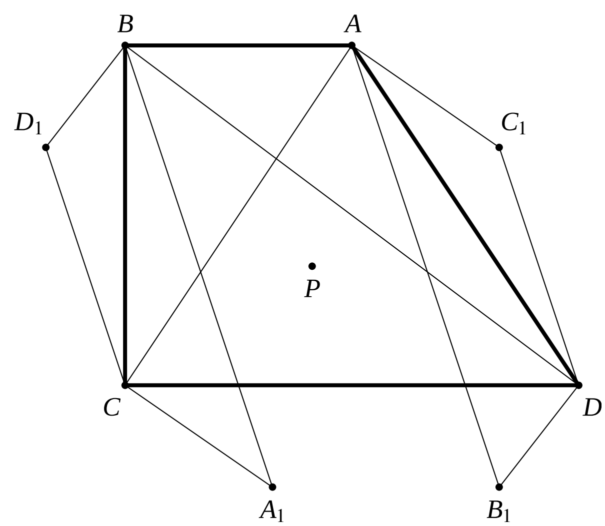
$$BAC\sphericalangle = BAC_1\sphericalangle - CAB_1\sphericalangle - BA_1C\sphericalangle. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel $-CAB_1\sphericalangle = B_1AC$ és $BAC_1\sphericalangle = -C_1AB\sphericalangle$, ezért

$$\begin{aligned}
BAC\sphericalangle &= B_1AC\sphericalangle - C_1AB\sphericalangle - BA_1C\sphericalangle = && && \text{1 pont}\\
&= B_1AC\sphericalangle - C_1DB\sphericalangle - BA_1C\sphericalangle = && (ABC_1D \text{ húrnégyszög}) && \text{1 pont}\\
&= B_1AC\sphericalangle - C_1DB\sphericalangle - BDC\sphericalangle = && (A_1BCD \text{ húrnégyszög}) && \text{1 pont}\\
&= B_1DC\sphericalangle - C_1DB\sphericalangle - BDC\sphericalangle = && (AB_1CD \text{ húrnégyszög}) && \text{1 pont}\\
&= B_1DC_1\sphericalangle
\end{aligned}$$

A P-re vonatkozó szimmetria miatt $B_1DC_1\sphericalangle = BD_1C\sphericalangle$, tehát $BAC\sphericalangle = BD_1C\sphericalangle$, ami azt jelenti, hogy az A, B, C, D_1 pontok egy körre illeszkednek. 1 pont

Diszkusszió (hiánya): 3 pont



Összesen: **10 pont**

Pontozás: Különböző esetek diszkussziója: 4 pont. Ehelyett 3 pont jár akkor, ha a megoldásban nincs szükség az esetek szétválasztására, mint például irányított szögek vagy komplex számok használatánál.

A maradék 6, illetve 7 pont a megoldás minden lényeges lépésére egyenként vagy körülbelül egyenletesen jár!