Megoldások és javítási útmutató

1. Anikó és Bea felírták a táblára a pozitív egészeket 1-től 2022-ig. Ezután a következő szabályokat követik:

– kiválasztanak a számok közül tetszőleges számút;
– összeadják a kiválasztott számokat;
– kiszámolják az összeg 7-tel való osztási maradékát, ezt a számot felírják a táblára;
– a kiválasztott számokat letörlik a tábláról.

Ezeket a lépéseket egészen addig folytatják, amíg már csak két szám marad a táblán. Ha az egyik a 2022, mi lehet a másik szám? **7 pont**

Megoldás. Mivel minden lépésben felírnak a táblára egy 7-tel való osztási maradékot, a keresett szám csak a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 számok közül kerülhet ki. 1 pont

Nézzük meg, egy lépésben mennyivel változik a táblán levő számok összege. (Egy lépésnek most a négy művelet egymás utáni elvégzését nevezzük.) Ha S a kiválasztott számok összege, M pedig az S szám 7-tel való osztási maradéka, akkor az összeg $(S-M)$-mel csökken, 1 pont

ami nyilván 7-tel osztható szám. 1 pont

Azaz a táblán levő számok összege minden lépés után ugyanannyi maradékot ad 7-tel osztva. 1 pont

Kezdetben az összeg $\frac{2022 \cdot 2023}{2}$, ami 7-tel osztható, 1 pont

tehát a táblán maradt két szám összege is 7-tel osztható. Mivel 2022 7–tel való osztási maradéka 6, 1 pont

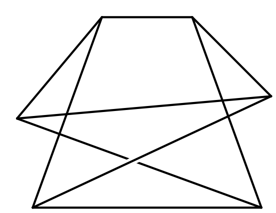
a másik szám csak az 1 lehet. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. A sík 6 adott pontja közül semelyik három nincs egy egyenesen. A pontpárokat összekötő szakaszok közül hányat kell meghúzni ahhoz, hogy biztosan legyen olyan háromszög, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók? **7 pont**

Megoldás. 9 szakasz még nem elég. 1 pont

Például (természetesen minden jó ábra 2 pontot ér, ábra nélkül nem jár pont): 2 pont



10 szakasz viszont már elég. 1 pont

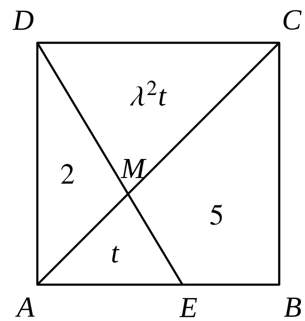
A 10 szakasznak 20 végpontja van, ezért kell lenni olyan pontnak, amely 4 szakasznak is végpontja. (Különben csak $6 \cdot 3 = 18$ végpont lenne.) 1 pont

Legyen ez a pont A, a belőle induló szakaszok AB, AC, AD és AE. Ha ezek a pontok nem határoznak meg háromszöget, akkor a B, C, D és E pontok között nem lehet összekötő szakasz. Azaz az összes lehetséges szakaszból $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ hiányzik. 1 pont

Viszont már 10 szakaszt behúztunk, az összes lehetséges szakasz száma $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, ezért a B, C, D, E pontok által meghatározott szakaszok közül legalább 1-nek kell még szerepelnie. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának E belső pontját a D csúccsal összekötő szakasz az AC átlót az M pontban metszi. Az AMD háromszög területe 2 cm^2. Az $EBCM$ négyszög területe pedig 5 cm^2. Mekkora az $ABCD$ négyzet területe? **7 pont**



Megoldás. Az AEM háromszög hasonló a CDM háromszöghöz, mert szögeik csúcs-, illetve váltószögek. 1 pont

Legyen a hasonlóság aránya λ, és jelölje t az AEM háromszög területét. Ekkor a CDM háromszög területe $T_{CDM} = \lambda^2 \cdot t$. 1 pont

Mivel az AMD és MCD háromszögeknek közös a D csúcshoz tartozó magassága, ezért területeik aránya megegyezik AM és MC szakaszok arányával, azaz $\frac{T_{CDM}}{T_{AMD}} = \frac{MC}{AM} = \lambda$. 1 pont

Mivel az AC átló felezi a négyzet területét, ezért $T_{AMD} + T_{MCD} = T_{AEM} + T_{EBCM}$. 1 pont

A fenti két összefüggésből az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda^2 \cdot t}{2} &= \lambda \\ \lambda^2 \cdot t + 2 &= t + 5 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer két megoldása közül csak a $\lambda = 2$, $t = 1$ megoldása a feladatnak, tehát a négyzet területe 12 cm^2. 3 pont

Összesen: **7 pont**

4. Hány pozitív egész számokból álló rendezett $(b;c)$ számpár létezik, amelyekre az

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \text{és} \quad x^2 + cx + b = 0$$

egyenletek egyikének sincs két különböző valós megoldása? **7 pont**

Megoldás. Egy másodfokú egyenletnek nincs két különböző valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nem pozitív. (Tudjuk, hogy b és c pozitív.) Ezt a feltételt a két egyenletre érvényesítve:

$$b^2 \leq 4c \quad \text{és} \quad c^2 \leq 4b.$$ 1 pont

Az első egyenlőtlenséget négyzetre emelve, a másodikat pedig 16-tal beszorozva:

$$b^4 \leq 16c^2 \leq 64b.$$ 1 pont

Az egyenlőtlenségláncot b-re megoldva:

$$b^4 - 64b = b(b^3 - 64) \leq 0,$$

amiből a $b \in \mathbb{N}^+$ feltételt figyelembe véve

$$b^3 \leq 64,$$

$$b \leq 4,$$

$b \in \{1;2;3;4\}$ adódik. 2 pont

Figyelembe véve, hogy $c \in \mathbb{N}^+$:

Ha $b = 1$, akkor $1 \leq 16c^2 \leq 64$, amiből $c = 1$ vagy $c = 2$ adódik. 1 pont

Ha $b = 2$, akkor $16 \leq 16c^2 \leq 128$, amiből $c = 1$ vagy $c = 2$ adódik. 1 pont

Ha $b = 3$, akkor $81 \leq 16c^2 \leq 192$, amiből $c = 3$ adódik.

Ha $b = 4$, akkor $256 \leq 16c^2 \leq 256$, amiből $c = 4$ adódik. 1 pont

Tehát a megfelelő $(b;c)$ rendezett számpárok a következők:

$$(1;1), \quad (1;2), \quad (2;1), \quad (2;2), \quad (3;3) \quad \text{és} \quad (4;4).$$

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Ha a versenyző próbálgatással kap eredményeket, akkor az összes eredményért 2, kevesebb eredményért 1 pont jár.