Megoldások és javítási útmutató

1. Az ax^2+bx+c alakban megadott $f(x)$ és $g(x)$ másodfokú függvényeknél a főegyütthatók rendre 2 és -2. Mindkét függvény grafikonja áthalad a $(16;54)$, $(20;53)$ pontokon. Mennyi az $f(0)+g(0)$ értéke? **7 pont**

Megoldás. Legyen $h(x)=f(x)+g(x)$ $(x\in\mathbf{R})$. Ekkor $h(x)$ elsőfokú függvény, és 1 pont

$$h(16)=f(16)+g(16)=54+54=108$$
$$h(20)=f(20)+g(20)=53+53=106. \qquad \text{1 pont}$$

Ha $h(x)=mx+b$, akkor

$$h(16)=16m+b=108$$
$$h(20)=20m+b=106. \qquad \text{2 pont}$$

Ebből

$$m=\frac{h(20)-h(16)}{20-16}=-\frac{1}{2} \qquad \text{1 pont}$$
$$b=h(16)-16m=108-16\left(-\frac{1}{2}\right)=116 \qquad \text{1 pont}$$

Ezt felhasználva:

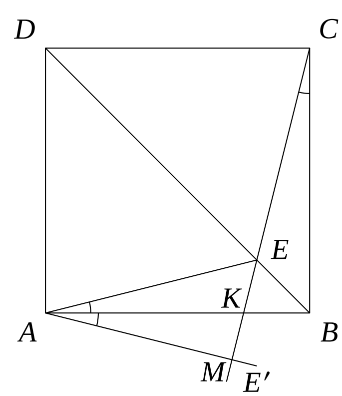
$$f(0)+g(0)=h(0)=b=116. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: **7 pont**

2. Legyen E az $ABCD$ négyzet BD átlójának tetszőleges pontja. Az AE egyenest tükrözzük az AB egyenesre. A kapott egyenes a CE egyenest az M pontban metszi.

a) Mi lesz az M pontok halmaza a síkon, ha E befutja a BD átlót?
b) Az E pont mely helyzetében lesz minimális az $AM\cdot CM$ szorzat értéke? **7 pont**

Megoldás. Jelölje K az AB és CM metszéspontját. Ha K az AB belső pontja, akkor:



A tengelyes szimmetria miatt $CBE\triangle \cong ABE\triangle$. 1 pont

Az egybevágóság, valamint az AB oldalra való tükrözés miatt

$$KCB\sphericalangle = BAE\sphericalangle = MAB\sphericalangle.$$ 1 pont

Mivel $MKA\sphericalangle = CKB\sphericalangle$ és $KAM\sphericalangle = BCK\sphericalangle$, ezért $AMK\triangle \sim CBK\triangle$, tehát

$$KBC\sphericalangle = AMK\sphericalangle = 90^\circ.$$ 1 pont

Ebből következik, hogy M illeszkedik az AC átló fölé rajzolt Thalész-körre. 1 pont

A Thalész-kör A-t tartalmazó félkör minden pontja megfelelő, beleértve a B és D végpontokat is. Ha pedig K az AD belső pontja, akkor mivel az AE egyenes tükörképe az AB-re, illetve az AD-re nézve is ugyanaz az egyenes (lévén AB és AD merőlegesek), ezért picit más betűzéssel az előző eset AC-re tengelyesen szimmetrikus ábráját kapjuk (ld. alább), tehát M ebben az esetben is illeszkedik a BD Thalész-körére. 1 pont

Mivel a szorzat egyik tényezője sem lehet negatív, ezért akkor minimális, ha valamelyik tényező nulla. Ez akkor következik be, ha az M pont egybeesik az A ponttal, azaz ha az E pont a BD és AC egyenesek metszéspontja. 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy kört 20 pont segítségével egyenlő hosszúságú ívekre osztunk fel, majd a pontokhoz az egyiktől elindulva az óramutató járásának megfelelően haladva az 1-től 20-ig terjedő számokat rendeljük hozzá. Ezután berajzoljuk a kör azon húrjait, amelyek olyan pontokat kötnek össze, amelyeknél a hozzájuk rendelt számok különbségének abszolútértéke egy prímszámmal egyenlő. Mennyi a berajzolt szakaszok által meghatározott háromszögek száma? **7 pont**

Megoldás. Legyenek egy keletkező háromszög csúcsaihoz rendelt jelzőszámok a, b, c ($1 \leqslant c < b < a \leqslant 20$, $a, b, c \in \mathbf{N}^+$). Ekkor

$$a - b = p_1,$$
$$b - c = p_2,$$
$$a - c = p_3,$$

ahol p_1, p_2, p_3 prímszámok, és

$$p_3 = a - c = (a - b) + (b - c) = p_1 + p_2.$$ 1 pont

Figyelembe véve, hogy p_1, p_2, p_3 között kell lennie páros prímszámnak is, és a prímek közül egyedül a 2 páros, ezért a nagyságrend alapján p_1 vagy p_2 közül az egyik értéke 2. 1 pont

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $p_1 = 2$. Ekkor $p_3 = p_2 + 2$.

A 20-nál kisebb prímek a 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 és 19. Ezekhez 2-t hozzáadva a 3, 5, 11, 17 esetén kapunk prímet. Így $p_3 \in \{5, 7, 13, 19\}$. 2 pont

Mivel $a = c + p_3 \leqslant 20$, ezért

- $p_3 = 5$ esetén $c = 1, 2, \ldots, 15$,
- $p_3 = 7$ esetén $c = 1, 2, \ldots, 13$,

- $p_3 = 13$ esetén $c = 1, 2, \ldots, 7$,
- $p_3 = 19$ esetén $c = 1$. 2 pont

c és p_3 esetén a értéke meghatározott. Mivel p_1 és p_2 értéke felcserélhető, ezért bármely $(c;a)$ számpárhoz kétféle b érték tartozhat. Így a megfelelő háromszögek száma:

$$2(15+13+7+1) = 72.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**