Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2021/2022-es tanév

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy téglalap oldalai 17 és 32 cm hosszúak. Két szemközti oldalát négyszer annyival változtattuk meg, mint a másik kettőt, s így négyzetet kaptunk. Milyen hosszú a négyzet oldala? **6 pont**

Megoldás. Egyik oldalát x-szel, a másikat $4x$-szel változtatjuk.

Ha mindkettőt növeljük, akkor $32+x=17+4x$, ahonnan $x=5$. Ekkor a négyzet oldala 37 cm. 2 pont

Ha mindkettőt csökkentjük, akkor $32-4x=17-x$, azaz $x=5$. Ekkor a négyzet oldala 12 cm. 2 pont

Ha az egyiket csökkentjük, a másikat növeljük, akkor két eset van:

$32-x=17+4x$, ahonnan $x=3$. Ekkor a négyzet oldala 29 cm. 1 pont

Illetve $32-4x=17+x$, ahonnan $x=3$. Ekkor a négyzet oldala 20 cm. 1 pont

Tehát a négyzet oldala négyféle lehet, 12, 20, 29 vagy 37 cm.

Összesen: **6 pont**

2. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely csak 2-es és 3-as számjegyeket tartalmaz, és osztható 132-vel! **6 pont**

Megoldás. $132=2^2\cdot 3\cdot 11$, ezért a számnak oszthatónak kell lennie 4-gyel, 3-mal és 11-gyel.

I. osztható 4-gyel, tehát a szám 32-re végződik.

II. osztható 3-mal, tehát akárhány 3-as és $3k$ darab (3-mal osztható darabszámú) 2-es szerepel a keresett számban.

III. osztható 11-gyel, elosztjuk 11-gyel, vagy a váltakozó előjelű összeget vizsgáljuk. 2 pont

A keresett szám sem kétjegyű, sem háromjegyű nem lehet, mert az I. és a II. feltétel egyszerre nem teljesíthető. 1 pont

Ha négyjegyű, akkor az I. és a II. feltételt a 2232 teljesíti, de ez nem osztható 11-gyel. 1 pont

Az I. és a II. feltételt teljesítő ötjegyű számok: 22 332; 23 232, 32 232, de ezek közül 11-gyel csak a 23 232 osztható. 1 pont

Tehát a keresett legkisebb pozitív egész szám a 23 232. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. Egy kalapba tíz cédulát teszünk, amelyeken az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 számok szerepelnek. Egyszerre két cédulát húzunk ki.

– Béla nyer, ha a két szám szorzata nagyobb, mint 30.

– Dezső nyer, ha a nagyobb számot a kisebbel osztva az eredmény egész.

– Frigyes nyer, ha a két szám összege prím.

a) Kinek van nagyobb esélye nyerni?
b) Nyerhetnek-e egyszerre mind a hárman?
c) Hányféle esetben nyernek pontosan ketten?
d) Hányféle esetben nem nyer senki? **6 pont**

Megoldás. *a)* Béla nyer 4-8, 4-9, 4-10,
5-7, 5-8, 5-9, 5-10,
6-7, 6-8, 6-9, 6-10,
7-8, 7-9, 7-10,
8-9, 8-10,
9-10 esetén, azaz 17-féle esetben. 1 pont

Dezső nyer 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7, 1-8, 1-9, 1-10,
2-4, 2-6, 2-8, 2-10,
3-6, 3-9,
4-8,
5-10 esetén, azaz 17-féle esetben.

Frigyes nyer 1-2, 1-4, 1-6, 1-10,
2-3, 2-5, 2-9,
3-4, 3-8, 3-10,
4-7, 4-9
5-6, 5-8,
6-7
7-10,
8-9,
9-10 esetén, azaz 18-féle esetben. 1 pont

Tehát Frigyes nyerési esélye a legnagyobb. 1 pont

b) Egyszerre mindhárman nem nyerhetnek. 1 pont

c) B és D nyer: 4-8, 5-10 esetén
B és F nyer: 4-9, 5-8, 6-7, 7-10, 8-9, 9-10 esetén
D és F nyer: 1-2, 1-4, 1-6, 1-10 esetén.

Tehát 12-féle esetben nyernek pontosan ketten. 1 pont

d) Az összes esetek száma $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

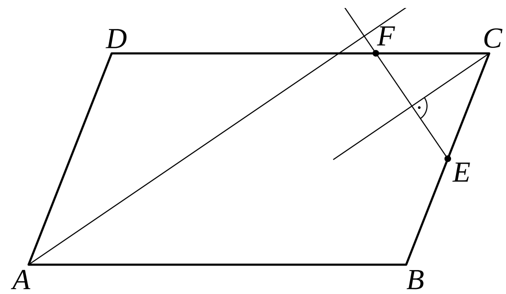
A logikai szitát alkalmazva: $45 - (17 + 17 + 18) + 12 = 5$.

5-féle esetben nem nyer senki. 1 pont

2. megoldás a *d)* részre. Nem nyer senki 2-7, 3-5, 3-7, 4-5, 4-6 esetben, azaz 5-féle esetben.

Összesen: **6 pont**

4. Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalain rendre kijelölünk olyan E és F pontokat, amelyekre $AB+BE=AD+DF$. Igazoljuk, hogy a $DAB\sphericalangle$ szögfelezője merőleges az EF egyenesre. **6 pont**



Megoldás. $AB+BC=AD+DC$;
$AB+BE+EC=AD+DF+FC$. 1 pont
Így a feladat feltétele alapján $EC=FC$. 1 pont
Az FEC egyenlő szárú háromszög szárszögének felezője egyben az $ABCD$ paralelogramma C csúcsbeli szögfelezője is, 1 pont
amely merőleges az EF alapra. 1 pont
A paralelogramma szemközti szögfelezői párhuzamosak egymással. 1 pont
Így ha az EF egyenes merőleges közülük az egyikre, akkor merőleges a másikra is. 1 pont
Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Összesen: **6 pont**