Megoldások és javítási útmutató

1. Négyzetszám-e a $2^{222}+3^{333}+4^{444}+5^{555}$? Válaszodat indokold! **6 pont**

Megoldás.

A 2 hatványainak végződései rendre 2; 4; 8; 6, ez a négy számjegy ismétlődik. 222 4-gyel osztva 2-t ad maradékul, így a 222. hatvány végződése megegyezik a 2. hatvány végződésével, azaz 4. 1 pont

A 3 hatványainak végződései rendre 3; 9; 7; 1, itt is négy számjegy ismétlődik. 333 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, így a 333. hatvány végződése megegyezik az 1. hatvány végződésével, azaz 3. 1 pont

A 4 hatványainak végződései felváltva 4 és 6, mivel a 444 páros szám, ezért a 444. hatvány végződése 6. 1 pont

Az 5 minden hatványa 5-re végződik. 1 pont

$4+3+6+5=18$, tehát a feladatban szereplő összeg 8-ra végződik. 1 pont

A négyzetszámok végződése csak 0; 1; 4; 9; 6; 5 lehet, így $2^{222}+3^{333}+4^{444}+5^{555}$ biztosan nem négyzetszám. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. *a)* Egy 3×3-as négyzet mezőit kiszínezzük a piros, kék, zöld színek valamelyikével az alábbi feltételek szerint:

– az egyik sor mezői egyszínűek,

– egy másik sor kis négyzetei kétféle színnel vannak színezve,

– a harmadikféle sor mezői páronként különböző színűek.

Hányféleképpen valósítható meg a feltételeknek megfelelő színezés?

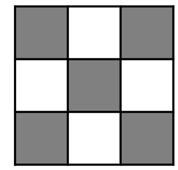
b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat beírjuk egy 3×3-as négyzet egy-egy mezőjébe úgy, hogy bármely két szomszédos szám szomszédos (közös éllel rendelkező) négyzetbe kerüljön. A négy sarokmezőbe kerülő számok összege 18. Melyik szám kerül középre? **8 pont**

Megoldás.

a) Az egyszínű sor mezőinek színezése 3-féleképpen, a kétszínűé $3\cdot 2\cdot 3=18$-féleképpen, a háromszínűé 6-féleképpen történhet. 1 pont

A kiszínezett sorok 6-féleképpen rendezhetők a táblán sorba. 1 pont

Így a feltételeknek megfelelő esetek száma: $3\cdot 18\cdot 6\cdot 6=1944$. 1 pont *b)* Színezzük ki a 3×3-as négyzet mezőit az ábra szerint.



Mivel bármely két szomszédos szám szomszédos (közös éllel rendelkező) négyzetbe kerül, és a táblára kerülő számok között 5 páratlan és 4 páros van, ezért a páratlan számok kerülnek a fekete, a páros számok pedig a fehér kis négyzetekbe. 2 pont

A páratlan számok összege: $1+3+5+7+9=25$. 1 pont

Ha a négy sötét sarokmezőbe kerülő számok összege 18, akkor középen csak a 7-es állhat. 1 pont

A mellékelt alábbi ábra egy lehetséges kitöltést mutat be. 1 pont

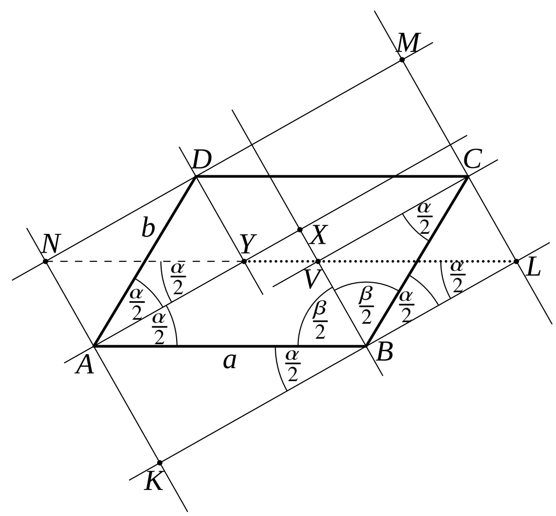
1	2	3
8	7	4
9	6	5

Összesen: **8 pont**

3. Megrajzoljuk egy a, b oldalú paralelogramma minden külső szögfelezőjét.

Milyen sokszöget zárnak közre? Határozzuk meg a keletkezett sokszög átlóinak hosszát! **8 pont**

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit: $a=AB=CD$, $b=BC=DA$. $DAB\sphericalangle=\alpha$, $ABC\sphericalangle=\beta$.



Húzzuk be a paralelogramma összes belső és külső szögfelezőjét.

A négy külső szögfelező négyszöget zár közre. Ennek csúcsait K, L, M és N jelöli.

Mivel $\alpha+\beta=180^\circ$, $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=90^\circ$, ezért bármely két szomszédos csúcsból induló belső szögfelező derékszöget zár be. 1 pont

A külső szögfelezők viszont merőlegesek az ugyanahhoz a csúcshoz tartozó belső szögfelezőre, amiből következik, hogy a paralelogramma tetszőleges belső/külső szögfelezőpárja merőleges vagy párhuzamos. 1 pont

Tehát a $KLMN$ négyszögnek négy derékszöge van, vagyis téglalap; az átlói egyenlő hosszúak. 1 pont

Tegyük fel, hogy az A-ból és D-ből húzott belső szögfelezők metszéspontja (Y) illeszkedik a $KLMN$ téglalap NL átlójára. Ezt majd később igazoljuk.

$NY=AD=b$, mert NY és AD az $AYDN$ téglalap átlója. 1 pont

Az ábra középpontos szimmetriája folytán $ND \# BL$ (párhuzamos és egyenlő), viszont az $AYDN$ téglalapban $AY \# ND$, vagyis $AY \# BL$, ezért az $ABLY$ négyszög paralelogramma. 1 pont

Tehát $AB \# YL$, azaz $YL=a$, vagyis a téglalap átlói hossza $NY+YL=b+a$. 1 pont

Be kell még látnunk, hogy N, Y és L valóban egy egyenesbe esnek. Mivel az NAY és az AKB derékszögű háromszögek szögei egyenlőek, két oldalpárjuk (NA és AK, illetve AY és KB) párhuzamos, azaz ugyanolyan állású, a háromszögek ugyanolyan körüljárásúak, ezért a harmadik oldaluk, NY, illetve AB is párhuzamos. Ez azt jelenti, hogy NY és YL is párhuzamos AB-vel, így a közös végpont miatt Y illeszkedik az NL átlóra. 2 pont

Összesen: **8 pont**

4. Egy konvex $(2n+2)$-szögben berajzolunk n^2 darab átlót. Bizonyítsuk be, hogy a behúzott átlók között lesz olyan, amelyik két páratlan oldalszámú sokszögre vágja szét az eredeti sokszöget. **8 pont**

Megoldás. Jelöljük az eredeti konvex sokszög csúcsait $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+2}$-vel.

Határozzuk meg azon berajzolható átlók számát, amelyek a sokszöget nem két páratlan oldalszámú részsokszögre osztják fel. Az ilyen átlók két nem szomszédos páros és páratlan sorszámú csúcsot kötnek össze. 2 pont

Az ilyen típusú átlók páratlan sorszámú végpontjai $(n+1)$-féleképpen jelölhetők ki. 1 pont

Ezzel a ponttal két páros sorszámú csúcsa szomszédos az eredeti sokszögnek, így az átló másik végpontja $(n-1)$-féleképpen adható meg. 2 pont

Így a feladat feltételének nem megfelelő átlók száma $(n+1)(n-1) = n^2-1$. 1 pont

Mivel $n^2-1 < n^2$, ezért a berajzolt átlók között biztosan lesz olyan is, amely két páros vagy két páratlan indexű csúcsot köt össze, és így két páratlan oldalszámú sokszögre bontja az eredeti sokszöget. 2 pont

Összesen: **8 pont**

5. Mi az a racionális szám, amely egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{4}{2^{2019}}+\frac{3}{2^{2020}}+\frac{2}{2^{2021}}$$

10 pont

1. megoldás.

$$\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots\frac{5}{2^{2018}}+\frac{4}{2^{2019}}+\frac{3}{2^{2020}}+\frac{2}{2^{2021}}=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\frac{4}{2^{2019}}+\left(\frac{3}{2^{2020}}+\frac{1}{2^{2020}}\right)=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\frac{4}{2^{2019}}+\frac{4}{2^{2020}}=$$ 2 pont

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\left(\frac{4}{2^{2019}}+\frac{2}{2^{2019}}\right)=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\frac{6}{2^{2019}}=$$ 2 pont

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\frac{3}{2^{2018}}=\ldots=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{k}{2^{2023-k}}+\frac{k-2}{2^{2023-k}}=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\left(\frac{k}{2^{2023-k}}+\frac{k-2}{2^{2023-k}}\right)=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{2k-2}{2^{2023-k}}=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{k-1}{2^{2022-k}}=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{k-1}{2^{2023-(k-1)}}=\ldots=$$ 3* pont

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\left(\frac{2020}{2^3}+\frac{2018}{2^3}\right)=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{4038}{2^3}=$$ 1 pont

$$=\frac{2022}{2}+\left(\frac{2021}{2^2}+\frac{2019}{2^2}\right)=\frac{2022}{2}+\frac{4040}{2^2}=\frac{2022}{2}+\frac{2020}{2}=\frac{4042}{2}=2021$$

Tehát a kifejezés értéke 2021. 2 pont

Összesen: **10 pont**

Megjegyzés. A * rész valamilyen indoklása szükséges.

2. megoldás.

Segédállítás: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$.

Bizonyítása például teljes indukcióval vagy 2-es számrendszerbeli felírással vagy számegyenesen történő ábrázolással történhet. 3 pont

$$\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{4}{2^{2019}}+\frac{3}{2^{2020}}+\frac{2}{2^{2021}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2021}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2021}}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2020}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2019}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)=$$ 3 pont

a segédállítás alapján a zárójelek a következő alakban is írhatóak:

$$=1-\frac{1}{2^{2021}}+1-\frac{1}{2^{2021}}+1-\frac{1}{2^{2020}}+1-\frac{1}{2^{2019}}+\ldots 1-\frac{1}{2}=$$

$$=2022\cdot 1-\frac{1}{2^{2021}}-\left(\frac{1}{2^{2021}}+\frac{1}{2^{2020}}+\frac{1}{2^{2019}}-\ldots\frac{1}{2}\right)=$$ 2 pont

ismét a segédtétel alapján:

$$=2022-\frac{1}{2^{2021}}-\left(1-\frac{1}{2^{2021}}\right)=2021.$$

Tehát a kifejezés értéke 2021. 2 pont

Összesen: **10 pont**