Megoldások és javítási útmutató

1. H olyan pozitív egész számokból álló halmaz, amelynek az elemeire érvényesek az alábbi feltételek:

(1) $2021 \in H$,

(2) ha $n \in H$, akkor n összes pozitív osztója is eleme H-nak,

(3) bármely k, $m \in H$, $1 < k < m$ esetén $km + 1 \in H$.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\} \subseteq H$.

b) Adjuk meg a $H \cap \mathbf{N}^+$ halmazt. **10 pont**

Megoldás.

a)	(1)	$\Rightarrow$	$2021 \in H$
$2021 = 1 \cdot 43 \cdot 47$	(2)	$\Rightarrow$	$1, 43, 47 \in H$
$1 \cdot 43 \cdot 47 + 1 = 2022$	(3)	$\Rightarrow$	$2022 \in H$
$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$	(2)	$\Rightarrow$	$2, 3, 6 \in H$
$2 \cdot 3 + 1 = 7$	(3)	$\Rightarrow$	$7 \in H$
$2 \cdot 7 + 1 = 15$	(3)	$\Rightarrow$	$15 \in H$
$15 = 3 \cdot 5$	(2)	$\Rightarrow$	$5 \in H$
$3 \cdot 5 + 1 = 16$	(3)	$\Rightarrow$	$16 \in H$
$16 = 2^4$	(2)	$\Rightarrow$	$4, 8 \in H$
$2 \cdot 4 + 1 = 9$	(3)	$\Rightarrow$	$9 \in H$
$3 \cdot 43 + 1 = 130$	(3)	$\Rightarrow$	$130 \in H$
$130 = 10 \cdot 13$	(2)	$\Rightarrow$	$10 \in H$

Ezzel beláttuk, hogy $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\} \subseteq H$. $10 \times 0{,}5$ pont $=5$ pont

b) Ezután igazolni fogjuk, hogy $H \cap \mathbf{N}^+ = \mathbf{N}^+$

Az *a)* eset vizsgálata alapján tegyük fel, hogy $\{1;2;3;\ldots;2k-1\} \subseteq H$ ($k \in \mathbf{N}^+$)

$2, k \in H$	(3)	$\Rightarrow$	$2 \cdot k + 1 \in H$	1 pont
$2k-1,\ 2k+1 \in H$	(3)	$\Rightarrow$	$(2k-1)(2k+1)+1 = 4k^2 \in H$	2 pont
$4k^2 = 2k \cdot 2k \in H$	(2)	$\Rightarrow$	$2k \in H$	1 pont

A megadott konstrukcióval folyamatosan a H halmaz elemeit kihagyás nélkül 2-2 újabb pozitív egész számmal bővíthetjük. Ez igazolja, hogy $H \cap \mathbf{N}^+ = \mathbf{N}^+$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. A huszárok díszszemléjén m sorban és n oszlopban vonulnak a katonák. Tudjuk, hogy minden sor és oszlop teljes, valamint hogy m és n is legalább 3. Parancsra a huszárok megállnak, és kardjuk összeérintésével üdvözlik a velük oldalról vagy átlósan szomszédos huszártársaikat. Hány huszár vonult fel a díszszemlén, ha így összesen 789 kardcsörrenést lehetett hallani? **10 pont**

Megoldás. A huszárokat három csoportba sorolhatjuk elhelyezkedésük szerint. Azok a huszárok, akik soruknak és oszlopuknak is a szélén (sarkon) helyezkednek el, 3 társukat üdvözlik, ez összesen 12 kardcsörrenés. 1 pont

Azok a huszárok, akik vagy a soruknak, vagy az oszlopuknak a szélén helyezkednek el, 5 társukat üdvözlik. Ilyen huszárból $2(m-2)+2(n-2)$ van, így ez összesen $10 \cdot (m+n-4)$ kardcsörrenés. 1,5 pont

A többi huszár 8 társát udvözlni, és belőlük $(m-2)\cdot(n-2)$ található, ez összesen

$$8(m-2)\cdot(n-2)$$

kardcsörrenés. 1,5 pont

Mivel minden üdvözlést kétszer számoltunk meg, ezért a díszszemlén összesen

$$\frac{1}{2}\cdot(12+10(m+n-4)+8(m-2)\cdot(n-2)) = 4mn-3m-3n+2.$$

kardcsörrenést lehetett hallani. 1 pont

Tehát

$$4mn-3m-3n+2 = 789$$
$$16mn-12m-12n+8 = 3156$$
$$(4m-3)\cdot(4n-3) = 3157.$$

Vagy másképpen:

$$4mn-3m-3n+2 = 789$$
$$\left(2m-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(2n-\frac{3}{2}\right) = 789\frac{1}{4}$$
$$(4m-3)\cdot(4n-3) = 3157.$$

2 pont

Mivel $3157 = 7 \cdot 11 \cdot 41$, ezért csak úgy bontható fel két 4-gyel osztva 1 maradékot adó, 1-nél nagyobb szám szorzatára, hogy $3157 = 41 \cdot 77$. Ekkor m és n értéke 11 és 20. 2 pont

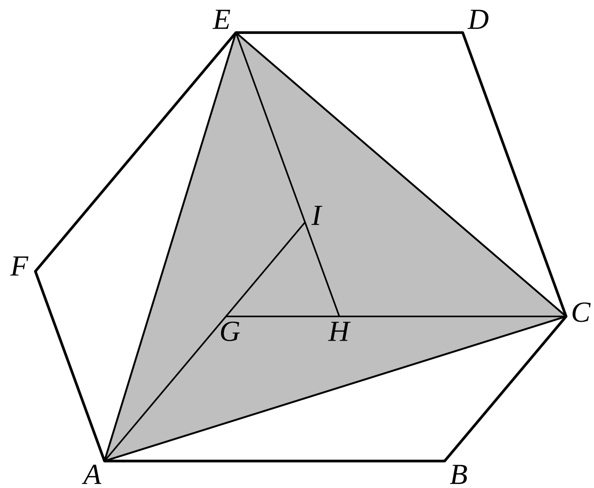
Tehát összesen 220 huszár vonult fel a díszszemlén. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. Az $ABCDEF$ konvex hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsd be, hogy az ACE és BDF háromszögek területe egyenlő. **10 pont**

Megoldás.

Az ACE háromszög területének vizsgálatához először húzzunk párhuzamosokat A-n keresztül BC-vel, C-n keresztül ED-vel és E-n keresztül FA-val. 2 pont



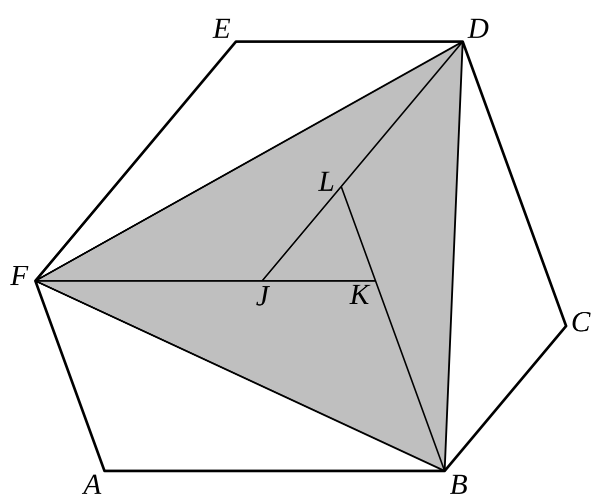
Legyenek ezen párhuzamosok páronként vett metszéspontjai az ábra szerint: G, H és I.

Ezek a metszéspontok a hatszög belsejében vannak, mivel például az A-ból induló BC-vel húzott párhuzamos csak a CD vagy ED oldalon „léphet ki” a hatszögből (mivel FE-vel és BC-vel párhuzamos) és az E-ből CD-vel (és FA-val) húzott párhuzamos (E-n kívüli) második metszéspontja a hatszöggel a BC vagy AB oldalon kell, hogy legyen. Ha ezeket a második metszéspontokat P-nek, illetve Q-nak nevezzük, akkor $AQPE$ egy konvex négyszög, aminek a csúcsai a hatszög kerületén vannak, ezért az átlói a hatszög belsejében metszik egymást (I-ben). 1 pont

Ha G, H és I nem esik egybe, akkor a hatszöget az ábra szerint 3 paralelogrammára ($ABCG$, $CDEH$, $EFAI$) és egy háromszögre (GHI) oszthatjuk. Ebből az ACE háromszög területét a három paralelogramma fele és a GHI háromszög alkotja. 1 pont

A BDF háromszög területének vizsgálatához ehhez hasonlóan húzzunk párhuzamosakat B-n keresztül CD-vel, D-n keresztül EF-fel és F-en keresztül AB-vel, amik az ábra szerint J, K és L pontokban metszik egymást.

Ha J, K és L nem esik egybe, akkor a hatszöget az ábra szerint 3 paralelogrammára ($FABK$, $BCDL$ és $DEFJ$) és egy háromszögre (JKL) oszthatjuk. Ebből a BDF háromszöget a három paralelogramma fele és JKL háromszög alkotja. 1 pont



A fenti két felosztásból következik, hogy elegendő belátni, hogy GHI és JKL egyenlő területű. 1 pont

Ennél több is teljesül: egybevágóak. Mivel az oldalaik párhuzamosak, ezért elég belátni, hogy például $GH = JK$. 1 pont

Az alábbiakban feltételezzük, hogy $AB > DE$. (Az $AB = DE$ esetet a végén vizsgáljuk.)
Mindkét szakasz hossza $AB - ED$, mivel:
Az 1. ábrán: $GH = GC - CG$.
$AB = GC$, illetve $HC = ED$, mert egy-egy paralelogramma szemközti oldalai.
Tehát $GH = AB - ED$.
A 2. ábrán: $JK = FK - FJ$.
$FK = AB$, illetve $FJ = ED$, mert egy-egy paralelogramma szemközti oldalai.
Tehát $JK = AB - ED$. 2 pont

Ha a hatszög szemközti oldalai egyenlők, akkor (és csak akkor) a G, H és I, illetve J, K és L metszéspontok egybeesnek, és ekkor az ACE és BDF háromszögek területe egyarán a hatszög területének a fele, mivel a paralelogrammákra való felosztás során mindkét háromszögbe a paralelogrammák fele esik. 1 pont

Összesen: **10 pont**