Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2022/2023-as tanév

Haladók I. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza a másik befogó és az átfogó hosszának átlaga (számtani közepe). A háromszög kerületének és területének mérőszáma egyenlő. Mekkorák a háromszög oldalai? **7 pont**

Megoldás. A feltételek szerint $a=\dfrac{b+c}{2}$, azaz $2a=b+c$, a háromszög kerülete így $a+2a=3a$. 1 pont

Így $T=K$ miatt $\dfrac{ab}{2}=3a$, és mivel a a geometriai tartalom miatt nem lehet 0, az egyenlőség csak $b=6$ esetén teljesül. 2 pont

Mivel a háromszög derékszögű, felírható rá a Pitagorasz-tétel: $a^2+36=c^2$, az előzőek alapján $c=2a-6$, és így az $a^2+36=4a^2-24a+36$ egyenlethez jutunk. 2 pont

Ennek megoldása rendezés után és az a nem lehet 0 feltétel ismételt felhasználásával $a=8$, c-re pedig $c=10$ adódik. 1 pont

A 6, 8, 10 egységű oldalakra a feladat feltételeinek ellenőrzése. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Legyenek $a=60$ és $b=2022$. Az $\{a;2a;3a;\ldots;b\cdot a\}$ halmaz elemi közül hány darab osztható b-vel? **7 pont**

Megoldás. A számok prímtényezős felbontása: $a=2^2\cdot3\cdot5,\quad b=2\cdot3\cdot337.$ 2 pont

Egy szám csak akkor osztható b-vel, ha oszható b minden prímtényzőjével. 1 pont

Mivel a prímtényezős felbontásában szerepel 2 és 3, de nem szerepel a 337, ezért a halmaz azon elemei oszthatók b-vel, amelyekben a együtthatója osztható 337-tel. 1 pont

A halmazban az első ilyen elem a $337a$, az utolsó ilyen elem a $2022a$. 1 pont

337 és 2022 között összesen 6 darab szám osztható 337-tel, tehát a halmaz elemei közül 6 darab osztható 337-tel. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. A feladat általánosítható, a b-vel osztható halmazelemek száma egyenló a és b legnagyobb közös osztójával.

3. Kilenc kártyára felírjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat úgy, hogy minden lapra pontosan egy számjegy kerüljön. Az összes kártya felhasználásával számokat képezünk. Például egy ilyen lehetőség a 8, 21, 394, 65 és 7 számok kialakítása. A képzett számokat összeadva mikor kapjuk a legkisebb összeget,

a) ha a kialakított összes szám prím,
b) illetve akkor, ha közülük mindegyik összetett. **7 pont**

Megoldás. A minimum eléréséhez arra kell törekedni, hogy a számok között csak egy- és kétjegyűek legyenek, és közöttük minél több legyen az egyjegyű. 1 pont

a) A prímszámok utolsó számjegye nem lehet 4, 6, 8, mivel akkor a képzett szám 2-vel osztható összetett szám lenne. Így a felsorolt számjegyek legalább a tízes helyiértéken fordulhatnak csak elő. Emiatt a kirakott számok összege nem lehet kevesebb, mint $(4+6+8)\cdot 10+(1+2+3+$ $+5+7+9)=207$. 2 pont

Ez az érték megvalósítható pl. a $2+3+5+41+67+89=207$ számokkal. Tehát a legkisebb megvalósítható összeg a 207. 1 pont

b) Az egyjegyű összetett számok a 4, 6, 8, 9. Az 1, 2, 3, 5, 7 számjegyekkel nem képezhetők egyjegyű összetett számok, ezért közülük legalább háromnak tízes helyiértékre kell kerülnie. A minimális összeg kialakításához a legkedvezőbb, ha ezek az 1, 2, 3. Így a képzett összeg nem lehet kevesebb, mint $(1+2+3)\cdot 10+(4+5+6+7+8+9)=99$. 2 pont

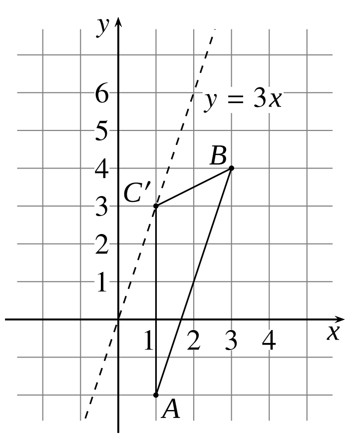
Ez az érték megvalósítható pl. a $6+8+9+15+27+34=99$ számokkal. Tehát a legkisebb megvalósítható összeg a 99. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A képzett számok indoklás nélküli felsorolásáért maximum 2-2 pont, azaz összesen 4 pont adható.

4. Egy háromszög három csúcsának koordinátái: $A(1;-2)$, $B(3;4)$, $C\left(3^{2022};3^{2023}\right)$. Mekkora a háromszög területe? **7 pont**

1. megoldás.



Mivel $3^{2023}=3\cdot 3^{2022}$, a háromszög C csúcsa illeszkedik az $y=3x$ függvény grafikonjára (az ábrán a szaggatott vonal), 2 pont

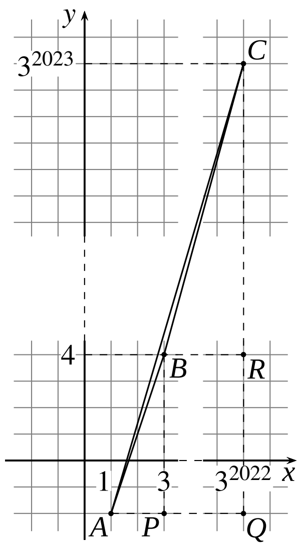
amivel párhuzamos a háromszög AB oldala. 1 pont

Ezért az ABC háromszög területe megegyezik minden olyan ABC' háromszög területével, amelynek C' csúcsa az $y=3x$ függvény grafikonjára esik, hiszen ekkor az AB oldaluk és az ehhez tartozó magasságuk is megegyezik. 2 pont

Érdemes olyan C' pontot választani, hogy az ABC' háromszög területe könnyen számítható legyen – ilyen pl. a $C'(1;3)$ pont, ekkor az ABC' háromszög területe (és így az ABC háromszög területe is): $\dfrac{5\cdot 2}{2}=5$ területegység. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás.



Készítsünk ábrát! (Nyilván ez csak úgy lehetséges, ha az x és az y tengelyt „megszakítjuk”, azaz az ábra torzítani fog.) Helyes ábra rajzolása. 2* pont

Vezessük be a $P(3;-2)$, $Q\left(3^{2022};-2\right)$, $R\left(3^{2022};4\right)$ pontokat! 1 pont

Az ABC háromszög területe megkapható úgy, hogy az AQC háromszög területéből kivonjuk a $PQRB$ téglalap, az APB és a BRC háromszögek területét. 1 pont

Vezessük be a $k=3^{2022}$ jelölést! (Egyszerűbbé teszi a számolást, de nem feltétlenül szükséges.)

Ekkor $T_{AQC}=\dfrac{(k-1)(3k+2)}{2}$, $T_{PQRB}=6(k-3)$, $T_{APB}=\dfrac{2\cdot 6}{2}=6$, $T_{BRC}=\dfrac{(k-3)(3k-4)}{2}$. 2 pont

Ebből $T_{ABC}=T_{AQC}-T_{PQRB}-T_{APB}-T_{BRC}=5$ (mivel a k kiesik). 1 pont

Összesen: 7 pont

* Ez a 2 pont levonandó az összpontszámból, ha a versenyző nem indokolja meg, hogy a C csúcs miért így, az AB oldalegyenes „fölött” helyezkedik el. Ezt ugyanis kihasználja a megoldás. Az indoklás lehet pl: a C csúcs az $y=3x$, az A, B csúcsok az $y=3x-5$ egyenesre esnek.

5. Egy 3×3-as táblázat minden egyes mezőjébe egy egyjegyű pozitív egész számot írunk. A sorokat balról jobbra és az oszlopokat felülről lefelé összeolvasva hat darab nem feltétlenül különböző háromjegyű számot kapunk. Töltsük ki a táblázatot olyan módon, hogy a kapott hat szám között szerepeljen egész szám négyzete, harmadik hatványa és ötödik hatványa **is,** és minél kevesebb legyen az olyan szám ezen hat szám között, amely nem egész szám négyzete, harmadik hatványa vagy ötödik hatványa. **7 pont**

Megoldás. A táblázatot ki lehet tölteni olyan módon, hogy az első feltétel teljesüljön, és ne legyen olyan szám, amely nem egész szám négyzete, harmadik hatványa vagy ötödik hatványa. Egyetlen háromjegyű ötödik hatvány van, a $243(=3^5)$, ennek kell tehát valahol szerepelnie. Mivel az átlóra való tükrözéssel a sorok és az oszlopok felcserélhetők, feltehető, hogy egy sorban szerepel.

Tegyük fel, hogy az utolsó sorban szerepel a 243. Mivel 2-re és 3-ra végződő négyzetszám nincs, ezért az első és a harmadik oszlopban harmadik hatványnak kell szerepelnie. A háromjegyű harmadik hatványok a $125(=5^3)$, a $216(=6^3)$, a $343(=7^3)$, az $512(=8^3)$ és a $729(=9^3)$, így az első oszlopban az 512-nek, a harmadikban a 343-nak kell szerepelnie. Ekkor viszont az első sorban nem lehet sem négyzetszám, sem köbszám, sem ötödik hatvány.

Ha a középső sorban szerepel a 243, akkor a harmadik oszlopban csak négyzetszám szerepelhet (mert a háromjegyű harmadik hatványoknak a középső jegye nem lehet hármas). Azonban a négyzetszámok négyes maradéka 0 vagy 1, tehát a tizesek helyén ha 3 áll, akkor az egyesek helyén 2, 3, 6 vagy 7 állhat, amiből csak a 6 jön szóba. A háromjegyű, hatra végződő négyzetszámokat végignézve (196, 256, 576, 676) viszont látjuk, hogy ilyen a tizesek helyén nem áll 3.

Tehát ebben az esetben sem sikerült úgy kitölteni a táblázatot, hogy csak négyzetszám, harmadik hatvány és ötödik hatvány szerepeljen benne.

Ha a 243 az első sorban szerepel, akkor a középső oszloban négyzetszámnak kell szerepelnie, mert nincs néggyel kezdődő háromjegyű harmadik (és ötödik) hatvány. Ez csak a $441 (= 21^2)$ vagy $484 (= 22^2)$ lehet. Ha a 441 lenne, akkor az utolsó sorban nem szerepelhet négyzetszám, mert a négyes maradék alapján ismét 6-ra kéne végződnie, de már láttuk, hogy a háromjegyű négyzetszámok nem végződnek 16-ra. Így az utolsó sorban csak harmadik hatvány szerepelhet, amelyek közül a 216 vagy az 512 jön szóba. A 216-ot választva az első oszlopot, 512-t választva az utolsó oszlopot nem tudjuk jól kitölteni.

Írjuk be végül a 484-et a második oszlopba. Ekkor végignézve a lehetőségeket a második sorban is csak a 484 szerepelhetne (nincs más, a feltételeknek megfelelő háromjegyű négyzetszám, harmadik hatvány vagy ötödik hatvány, melynek a középső jegye 8). Az első oszlopban 24-gyel kezdődő megfelelő szám csak a 243, az utolsó oszlopban 34-gyel kezdődő megfelelő szám csak a 343, és ez egy megfelelő kitöltés (az utolsó sorban ekkor 343 szerepel).

Pontozás:

A 243 megtalálásáért, szükségességéért és helyének indoklásáért:	3 pont
A négyzetszámok és köbszámok megtalálásáért:	2 pont
A teljes helyes kitöltésért:	2 pont
Összesen:	**7 pont**