

# Haladók I. kategória 2. forduló

## Feladatok

1. Legyen  $n$  3-mal osztható pozitív egész szám. Az  $n-1, n-2, \dots, 2, 1$  számsorozatból elhagyjuk a 3-mal osztható számokat, majd az első két számot pozitív előjellel, a következő kettőt negatív előjellel, az azután következő kettőt megint pozitív előjellel látjuk el. A kettesével változó előjelezést addig folytatjuk, amíg a számsorozat végére érünk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott számok összege mindig  $n$ -nel lesz egyenlő!

7 pont

2. Határozzuk meg az  $f(x) = \frac{(x^2 + 2021)^2}{x^2} + 2022$  függvény minimumértékét és helyét.

7 pont

3. Anna és Balázs a  $10 \times 10$ -es szorzótáblán a következő „játékot” játsszák:

- Anna kiválaszt egy függőleges sávot (néhány szomszédos oszlopot) a táblázatban, és a benne szereplő számokat megszorozza  $(-1)$ -gyel, majd
- Balázs kiválaszt egy vízszintes sávot (néhány szomszédos sort) a táblázatban, és a benne szereplő számokat megszorozza  $(-1)$ -gyel. (Így bizonyos számok akár kétszer is szorzódnak  $(-1)$ -gyel.)

Ha például Anna az első három oszlopot, míg Balázs a negyedik sortól a hetedik sorig „választ”, akkor a módosított táblázat számai:

-1	-2	-3	4	5	6	7	8	9	10
-2	-4	-6	8	10	12	14	16	18	20
-3	-6	-9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	-16	-20	-24	-28	-32	-36	-40
5	10	15	-20	-25	-30	-35	-40	-45	-50
6	12	18	-24	-30	-36	-42	-48	-54	-60
7	14	21	-28	-35	-42	-49	-56	-63	-70
-8	-16	-24	32	40	48	56	64	72	80
-9	-18	-27	36	45	54	63	72	81	90
-10	-20	-30	40	50	60	70	80	90	100

(Anna és Balázs is csak egyszer választanak sávot a „játék” során.)

- a) Lehetséges-e, hogy a kapott táblázat 100 darab számát összeadva az összeg 0?  
b) Lehetséges-e, hogy a kapott táblázat 100 darab számát összeadva az összeg 1?

Amennyiben a megoldás lehetséges, írjuk le a játék lépéseit is!

7 pont

4. Legyen  $O$  az  $ABCD$  négyzet  $CD$  oldalának  $D$ -hez közelebbi olyan belső pontja, amelyre teljesül, hogy az  $O$  középpontú  $OD$  sugarú kör, valamint a  $B$  középpontú  $2 \cdot OD$  sugarú kör érinti egymást. Az érintési pontban a két körhöz közös érintőt húzunk. Határozzuk meg az érintő négyzetbe eső szakaszának a négyzet oldalához viszonyított arányát!

7 pont