Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen n 3-mal osztható pozitív egész szám. Az $n-1$, $n-2$, …, 2, 1 számsorozatból elhagyjuk a 3-mal osztható számokat, majd az első két számot pozitív előjellel, a következő kettőt negatív előjellel, az azután következő kettőt megint pozitív előjellel látjuk el. A kettesével változó előjelezést addig folytatjuk, amíg a számsorozat végére érünk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott számok összege mindig n-nel lesz egyenlő! **7 pont**

Megoldás. Válasszuk szét az eseteket aszerint, hogy n páros vagy páratlan. 1 pont

Ha n páros, akkor 6-tal is osztható, ezért felírható $n = 6k$ alakban, ahol k pozitív egész szám. 1 pont

Ekkor $6k-1$-ig összesen $2k-1$ darab lesz 3-mal osztható, azaz a 3-mal osztható számok kihagyása után összesen $6k-1-(2k-1) = 4k$ darab szám marad. 1 pont

Ezeket lehet négyesével csoportosítani, egy csoporton belül a számok összege

$$(6l-1)+(6l-2)-(6l-4)-(6l-5) = 6,$$

és mivel k db csoport van, a teljes összeg $6k = n$. 1 pont

Ha n páratlan, akkor felírható $6k+3$ alakban, ahol k nem negatív egész szám.

Ekkor az összeg: $(6k+2)+(6k+1)-(6k-1)-(6k-2)+(6k-4)+(6k-5)\ldots$. 1 pont

Az összegben a harmadik tagtól kezdve ugyanazok a tagok szerepelnek, mint a páros esetben, csak ellenkező előjellel. 1 pont

Ezek összegéről tudjuk, hogy $6k$, így a teljes összeg: $6k+2+6k+1-6k = 6k+3 = n$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{\left(x^2+2021\right)^2}{x^2}+2022$ függvény minimumértékét és helyét. **7 pont**

Megoldás. Mivel a függvény páros, ezért elegendő $x>0$ esetben keresni a megoldást. 1 pont

$$f(x)=\frac{(x^2+2021)^2}{x^2}+2022=\left(\frac{x^2+2021}{x}\right)^2+2022=$$ 1 pont

$$=\left(2\cdot\frac{x+\frac{2021}{x}}{2}\right)^2+2022\geq$$ 1 pont

a számtani és mértani közép közötti összefüggést alkalmazva

$$\geq\left(2\cdot\sqrt{x\cdot\frac{2021}{x}}\right)^2+2022=$$ 1 pont

$$=4\cdot 2021+2022=10\,106.$$ 1 pont

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=\dfrac{2021}{x}$, amiből $x=\pm\sqrt{2021}$ következik. 1 pont

Tehát a függvény lokális minimum helye $x_1=-\sqrt{2021}$, ill. $x_2=\sqrt{2021}$-nél van, s mindkét helyen az értéke 10 106. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A versenyző vizsgálhatja a függvényt például az alábbi módon is.

$$f(x)=\frac{(x+2001)^2}{x^2}+2022=\frac{x^4+2\cdot 2021x^2+2021^2}{x^2}+2022=$$
$$=x^2+\frac{2021^2}{x^2}+6064\geq 2\sqrt{2021^2}+6064=10\,106.$$

Ekkor a megoldás első mondata szükségtelen, az érte járó 1 pont a kétféle minimumhely megállapításához adandó.

3. Anna és Balázs a 10×10-es szorzótáblán a következő „játékot” játsszák:

- Anna kiválaszt egy függőleges sávot (néhány szomszédos oszlopot) a táblázatban, és a benne szereplő számokat megszorozza (-1)-gyel, majd
- Balázs kiválaszt egy vízszintes sávot (néhány szomszédos sort) a táblázatban, és a benne szereplő számokat megszorozza (-1)-gyel. (Így bizonyos számok akár kétszer is szorzódnak (-1)-gyel.)

Ha például Anna az első három oszlopot, míg Balázs a negyedik sortól a hetedik sorig „választ”, akkor a módosított táblázat számai:

−1	−2	−3	4	5	6	7	8	9	10
−2	−4	−6	8	10	12	14	16	18	20
−3	−6	−9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	−16	−20	−24	−28	−32	−36	−40
5	10	15	−20	−25	−30	−35	−40	−45	−50
6	12	18	−24	−30	−36	−42	−48	−54	−60
7	14	21	−28	−35	−42	−49	−56	−63	−70
−8	−16	−24	32	40	48	56	64	72	80
−9	−18	−27	36	45	54	63	72	81	90
−10	−20	−30	40	50	60	70	80	90	100

(Anna és Balázs is csak egyszer választanak sávot a „játék” során.)

a) Lehetséges-e, hogy a kapott táblázat 100 darab számát összeadva az összeg 0?
b) Lehetséges-e, hogy a kapott táblázat 100 darab számát összeadva az összeg 1?

Amennyiben a megoldás lehetséges, írjuk le a játék lépéseit is! **7 pont**

Megoldás. *a)* 0 nem lehet a 100 szám összege a táblázatban, hiszen a táblázatban (előjeltől függetlenül mindig) $5 \cdot 5 = 25$, azaz páratlan darab páratlan szám van. Viszont páratlan darab páratlan szám összege mindig páratlan (és a paritáson nem változtat a többi páros szám összege). 3 pont

b) A táblázat elemeit (egyes celláit) úgy kaphatjuk, hogy az 1, 2, ..., 10 elemek mindegyikét megszorozzuk az 1, 2, ..., 10 elemek mindegyikével. Mivel itt ezek összegét kell képezni, ezért a táblázat elemeinek összege az $(1+2+\ldots+10)(1+2+\ldots+10)$ szorzat eredménye lesz. Anna és Balázs e két tényező tagjainak előjelét változtatják. Az 1 többféleképpen kijöhet, például

- $1 = (28-27)^2 = (1+2+3+4+5+6+7-8-9-10)^2$ miatt ha az utolsó három oszlopot és utolsó három sort szorozzuk (-1)-gyel;
- illetve $2+3+4+5+6+7 = 27$ miatt, ha az ezeknek a számoknak megfelelő oszlopokat és sorokat szorozzuk (-1)-gyel;
- illetve az előző két „ötlet keverésével”; például, ha a 8, 9, 10-es sorokat és 2, 3, 4, 5, 6, 7-es oszlopokat szorozzuk (-1)-gyel.

1	2	3	4	5	6	7	−8	−9	−10
2	4	6	8	10	12	14	−16	−18	−20
3	6	9	12	15	18	21	−24	−27	−30
4	8	12	16	20	24	28	−32	−36	−40
5	10	15	20	25	30	35	−40	−45	−50
6	12	18	24	30	36	42	−48	−54	−60
7	14	21	28	35	42	49	−56	−63	−70
−8	−16	−24	−32	−40	−48	−56	64	72	80
−9	−18	−27	−36	−45	−54	−63	72	81	90
−10	−20	−30	−40	−50	−60	−70	80	90	100

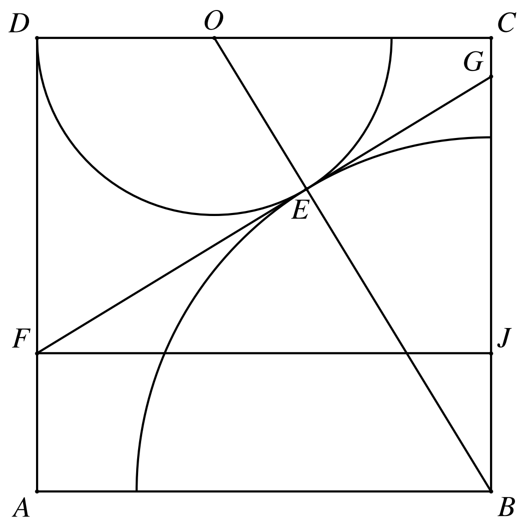
Csak az első megoldás táblázata: 4 pont

A versenyző bármilyen (akár indoklás nélküli) jól követhető helyes megoldása 4 pontot ér.

Összesen: **7 pont**

4. Legyen O az $ABCD$ négyzet CD oldalának D-hez közelebbi olyan belső pontja, amelyre teljesül, hogy az O középpontú OD sugarú kör, valamint a B középpontú $2 \cdot OD$ sugarú kör érinti egymást. Az érintési pontban a két körhöz közös érintőt húzunk. Határozzuk meg az érintő négyzetbe eső szakaszának a négyzet oldalához viszonyított arányát! **7 pont**

Megoldás. Tekintsük a két körnek és az érintőnek a négyzetbe eső részét, és használjuk az alábbi ábra jelöléseit. Legyen $OD = r$, a négyzet oldala pedig a. Mivel E közös érintési pontja a köröknek, ezért O, E és B pontok egy egyenesre esnek, és $OB = 3r$. 1 pont



Állítsunk F-ből merőlegest BC-re, a talppontja legyen J. $FJG\triangle \cong BCO\triangle$, mert $FJ = BC$, mindkettő derékszögű és $GFJ\sphericalangle = OBC\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek.

Ezért $FG = BO = 3r$, azaz a keresett arány $\dfrac{FG}{BC} = \dfrac{BO}{BC} = \dfrac{3r}{a}$. 2 pont

Írjuk fel a BCO derékszögű háromszög oldalaira Pitagorasz-tételt: $(a-r)^2 + a^2 = (3r)^2$. 1 pont

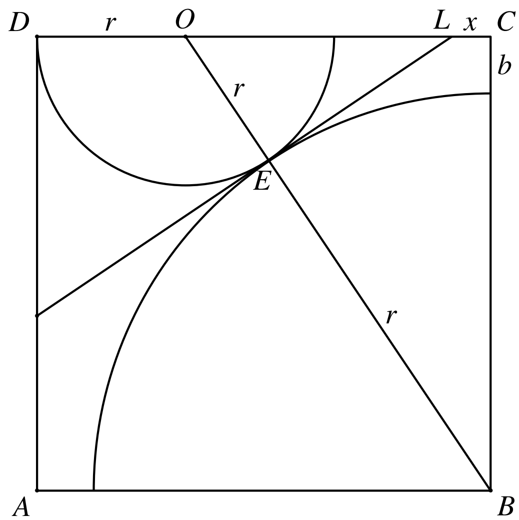
A négyzetre emelések elvégzése, nullára rendezés, majd a kettővel való osztás után a következő egyenletet kapjuk: $4r^2 + ar - a^2 = 0$. 1 pont

Az egyenletet elosztva $a^2 > 0$-val, az $\dfrac{r}{a}$-ra másodfokú $4\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 + \dfrac{r}{a} - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek a megoldása $\left(\dfrac{r}{a}\right)_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$. 1 pont

Figyelembe véve, hogy r is és a is pozitív, csak a pozitív gyök lehetséges, ahonnan a keresett arány $\dfrac{3r}{a} = \dfrac{3}{8}\left(\sqrt{17} - 1\right)$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy az érintő biztosan a BC oldalt metszi, nem lehet, hogy a CD-t. Tegyük fel ugyanis, hogy mégis a CD oldal belső L pontjában metszi az érintő a négyzet határát, és használjuk az ábra jelöléseit.



Az OCB háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva a fentiekkel azonosan ismét az $r = \frac{\sqrt{17}-1}{8} \cdot a$ összefüggést kapjuk. Mivel az OCB háromszög hasonló OEL háromszöghöz (szögeik páronként egyenlők), ezért $\frac{OE}{OL} = \frac{OC}{OB}$, azaz $\frac{r}{a-r-x} = \frac{a-r}{3r}$. Ebből rendezés után $x = \frac{2r^2+2ar-a^2}{r-a}$, amibe r-et behelyettesítve $x = \frac{3-\sqrt{17}}{8} \cdot a$ adódik, ami negatív.