Megoldások és javítási útmutató

1. Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám darabszámú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok – mint csúcsok – által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány pontot jelöltünk meg az egyeneseken? **7 pont**

Megoldás. Legyen az egyik egyenesen megjelölt pontok száma p, a másikon megjelölteké pedig q.

A négyszögek esetén 2-2 pontot kell mindkét egyenesről választani, ezt $\binom{p}{2} \cdot \binom{q}{2}$-féleképpen tehetjük meg. 1 pont

Háromszögek esetén 2 pontot kell az egyik és 1 pontot a másik egyenesről választani, ezt összesen $\binom{p}{2} \cdot q + \binom{q}{2} \cdot p$-féleképpen tehetjük meg. 1 pont

A feladat feltétele szerint

$$2\cdot\left(\binom{p}{2}\cdot q+\binom{q}{2}\cdot p\right) = \binom{p}{2}\cdot\binom{q}{2}, \quad \text{azaz} \quad 2\cdot\frac{p(p-1)q}{2}+2\cdot\frac{q(q-1)p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{2}.$$ 1 pont

pq-val osztva, majd rendezve a $(p-1)(q-1)-4(p-1)-4(q-1)=0$ alakhoz jutunk, ami rendezés után: $pq-5p-5q+9=0$. A bal oldalt szorzattá alakítva $(p-5)(q-5)=16$ adódik. 2 pont

Mivel p és q pozitív egészek, ezért $p-5$, illetve $q-5$ osztói 16-nak. A lehetőségek:

$p-5$	$q-5$	p	q
16	1	21	6
8	2	13	7
4	4	9	9
-4	-4	1	1

(természetesen p és q szerepe felcserélhető) 1 pont

Mivel p és q prímszámok, ezért az egyik egyenesen (mindegy, hogy melyiken) 13, a másikon pedig 7 pont lett kijelölve. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x;y;z;u)$ számnégyes van, amelyre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$2^x+2^y+2^z+2^u=2^{2023}.$$ **7 pont**

1. megoldás. Mindkét oldalt 2^{2023}-nal elosztva, az $a=x-2023$, $b=y-2023$, $c=z-2023$ és $d=u-2023$ jelölésekkel az egyenlet $2^a+2^b+2^c+2^d=1$ alakra hozható (a, b, c, d egészek). 1 pont

Tegyük fel, hogy $a\le b\le c\le d$. Látható, hogy $a=b=c=d=-2$ (azaz $x=y=z=u=2021$) megoldás. 1 pont

Ha a bal oldalon nem minden tag 2^{-2}, akkor $2^d > 2^{-2}$, de ez csak úgy lehet, ha $d = -1$ (és így $u = 2022$). 1 pont

Kivonva ezt a tagot mindkét oldalból azt kapjuk, hogy $2^a + 2^b + 2^c = 2^{-1}$. Itt csak $c = -2$ (és $z = 2021$) lehet, mert $c \leq -3$ esetén a bal oldal kisebb, $c \geq -1$ esetén nagyobb, mint a jobb oldal. 1 pont

A 2^c tagot is kivonva marad $2^a + 2^b = 2^{-2}$. Az előzőhöz hasonlóan látható, hogy csak $b = -3$ (és így $y = 2020$) a megfelelő, amiből $a = -3$ (és így $x = 2020$) is következik. 1 pont

Most lássuk a megoldások számát!

$a = b = c = d = -2$, azaz $x = y = z = u = 2021$, ez 1 lehetőség,

illetve $a = b = -3$, $c = -2$, $d = -1$, azaz $x = y = 2020$, $z = 2021$, $u = 2022$ esetében valójában x, y, z, u tetszőleges sorrendben lehet, ezek száma $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

Összesen tehát 13 számnégyes a megoldása az egyenletnek. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Tegyük fel, hogy $x \leq y \leq z \leq u$, ahol $u \leq 2022$. Az egyenlőségben szereplő számok 2-es számrendszerbeli alakját egy táblázatba írva:

	2^{2023}	…	2^u	…	2^z	…	2^y	…	2^x	…	2^0
2^u			1	0	0	0	0	0	0	0	0
2^z					1	0	0	0	0	0	0
2^y							1	0	0	0	0
2^x									1	0	0
2^{2023}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1 pont

Ahhoz, hogy a felső 4 szám összege az alsó szám, azaz 2^{2023} legyen, szükséges, hogy 2^x oszlopában összesen páros sok (tehát 2 vagy 4 darab) 1-es legyen, mert csak így lehet az alsó sor megfelelő oszlopában 0. 1 pont

1. eset: 2^x oszlopában 2 db 1-es van (azaz $y = x$, de $z > x$). Ekkor 2^{x+1} oszlopába átkerül egy 1-es maradék, ezért ott még egy 1-esnek kell lennie (azaz $z = y + 1$). De akkor ugyanígy ebben az oszlopban is képződik egy 1-es maradék, ezért 2^{x+2} oszlopában is kell legyen egy 1-es (azaz $u = z + 1$). Végül ennek a két 1-esnek az összegéből származó 1-es maradék kerül át 2^{2023} oszlopába, azaz $2023 = u + 1$. Összefoglalva $x = y = 2020, z = 2021, u = 2022$. 2 pont

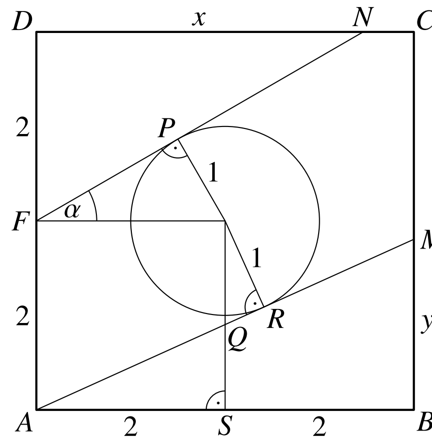
2. eset: 2^x oszlopában 4 db 1-es van (azaz $y = x = z = u$). Ekkor $y = x = z = u = 2021$. 1 pont

Még figyelembe kell vennünk, hogy valójában x, y, z és u tetszőleges sorrendben lehet, ezért az 1. eset $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$ lehetőség, összesen tehát 13 különböző számnégyesre igaz az egyenlőség. 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. A 4 egység oldalú $ABCD$ négyzet K középpontja köré egy 1 egység sugarú kört írunk. Az A csúcsból a körhöz húzott egyik érintő a BC oldalt az M pontban metszi, az AD oldal F felezőpontjából a körhöz húzott egyik érintő pedig a DC oldalt az N pontban metszi. Az ABM vagy a DFN háromszög területe a nagyobb? **7 pont**

Megoldás. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



Az AB oldal felezőpontja legyen S, a KS szakasz és az AM szakasz metszéspontja legyen Q, az érintési pontok pedig R és P. Az FKP háromszög derékszögű, az FK átfogó kétszerese a PK befogónak, ezért ez egy félszabályos háromszög, tehát $\alpha = 30^\circ$. A DFN háromszög N csúcsnál lévő szöge az α szög váltószöge, ezért ez a szög is $\alpha = 30^\circ$. 1 pont

Ebből következik, hogy a DFN derékszögű háromszög is félszabályos háromszög, $DN = x$ oldala a 2 egység hosszúságú FD oldal $\sqrt{3}$-szorosa, azaz $x = 2\sqrt{3}$. Azaz a DFN háromszög területe $2\sqrt{3}$. 1 pont

Az ABM háromszög területe $2y$, ezért a kérdés az, hogy az y a $\sqrt{3}$-nál kisebb vagy nagyobb.

Az ASQ háromszög és az ABM háromszög hasonlóak (megfelelő szögeik egyállásúak), a hasonlóság aránya 1 : 2, ezért $QS = \frac{y}{2}$, így $KQ = 2 - \frac{y}{2}$.

A KRQ és az ASQ háromszögek hasonlóak (mindkettő derékszögű, és a közös Q csúcsnál lévő szögeik egyenlők, mivel csúcsszögek). Ezért $\frac{KQ}{KR} = \frac{AM}{AB}$, azaz $\frac{2-\frac{y}{2}}{1} = \frac{\sqrt{y^2+16}}{4}$. 2 pont

Mindkét oldalt 4-gyel szorozva, négyzetre emelve, és 0-ra rendezve kapjuk: $3y^2 - 32y + 48 = 0$.

Az egyenlet diszkriminánsa $448 = 64 \cdot 7$, a gyökök $\frac{32+8\sqrt{7}}{6}$ és $\frac{32-8\sqrt{7}}{6}$. 1 pont

Az első gyök nagyobb, mint 4, ezért $y = \frac{32-8\sqrt{7}}{6} = \frac{16-4\sqrt{7}}{3}$.

Azt kell már csak eldönteni, hogy ez $\sqrt{3}$-nál kisebb-e vagy nagyobb. Vagy, ami ezzel egyenértékű, hogy a $3y = 16 - 4\sqrt{7}$ és a $3\sqrt{3}$ közül melyik nagyobb. Ezt eldönthetjük a 16 és a $3\sqrt{3} + 4\sqrt{7}$ összehasonlításával is (mivel mindkettő pozitív, elég a négyzetüket összehasonlítani):

$$16^2 \ ? \ (3\sqrt{3}+4\sqrt{7})^2 \iff 256 \ ? \ 139 + 24\sqrt{21} \iff 117 \ ? \ 24\sqrt{21} \iff 39 \ ? \ 8\sqrt{21}.$$

Mivel $39^2 = 1521 > 1344 = (8\sqrt{21})^2$, ezért $16 - 4\sqrt{7} = 3y > 3\sqrt{3}$, tehát $y > \sqrt{3}$.

Így az ABM háromszög területe nagyobb, mint a DFN háromszögé. 2 pont

Összesen: **7 pont**