Megoldások és javítási útmutató

1. Az (a_n) sorozat tagjait a $\{0;1;2\}$ halmazból választjuk ki az alábbi szabály szerint: ha $a_k = j$, akkor $a_{k+j} = 0$ $(k \in \mathbb{N}^+)$.

Jelölje S a sorozat első 2023 tagjának összegét! Határozzuk meg S lehetséges legnagyobb értékét. **10 pont**

Megoldás. Legyen a sorozat első 2023 tagja között előforduló kettesek száma a, az egyeseké b, a nulláké c. Ekkor $a+b+c = 2023$ és $S = 2a+b$. 2 pont

Tetszőleges $1 \le k \le 2021$, $a_k = 2$ esetén $a_{k+2} = 0$. Ha tehát 1-től 2023-ig a darab 2-es van, akkor 1-től 2025-ig legalább a darab 0 van, ami azt jelenti, hogy 1-től 2023-ig a 0-k száma legalább $a-2$. Így $c \ge a-2$, azaz $a \le c+2$. 1 pont

Ennek figyelembe vételével:

$$S = 2a+b \le a+b+c+2 = 2023+2 = 2025.$$ 3 pont

A maximális összeg megvalósítható például az alábbi sorozattal:

$$\underbrace{\overbrace{2,1,0},\overbrace{2,1,0},\overbrace{2,1,0}}_{\text{3-szor}},\underbrace{\overbrace{2,2,0,0},\overbrace{2,2,0,0},\ldots,\overbrace{2,2,0,0}}_{\text{503-szor}},2,2,$$

ahol a sorozat elején a 2, 1, 0 részlet 3-szor szerepel, utána a 2, 2, 0, 0 részlet jön 503-szor, majd ezt követően két 2-es következik. 3 pont

Ekkor

$$S = 3\cdot 3 + 503\cdot 4 + 2\cdot 2 = 2025.$$

Tehát S maximális értéke 2025. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Konstruáljunk ilyen sorozatot! Minden 1-est 0 követ, minden 2-es után következhet 2 és utána 0, 0 vagy 1 és 0, illetve 0 és 0. A sorozat tehát „1, 0”, „2, 0, 0”, „2, 1, 0” vagy „2, 2, 0, 0” blokkokból és elő nem írt 0-kból állhat. 2 pont

Akkor érhető el a legnagyobb összeg, ha a számok átlaga a lehető legnagyobb. ez pedig akkor következik be, ha kizárjuk a nem előírt 0-kat, és mivel az „1, 0” és „2, 0, 0” blokkban az átlag 1-nél kisebb, míg a „2, 1, 0” és a „2, 2, 0, 0” blokkokban 1, így csak a két utóbbit használjuk. 2 pont

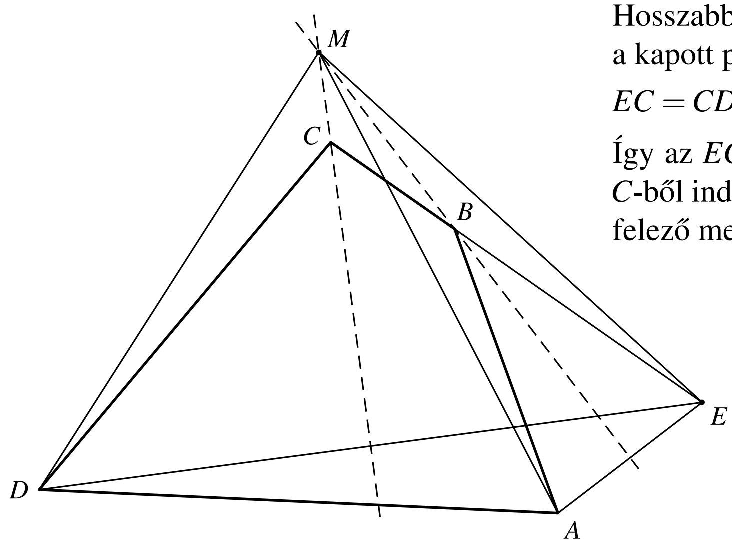
Az átlag így legalább 1. Ezt akkor tudjuk növelni, ha a sorozat 2023. tagja után a lehető legtöbb előírt 0-t hagyhatjuk el, vagyis a 2024. és 2025. helyeken előírt 0-k állnak. 2 pont

Eszerint a 2022., és 2023. tag 2, 2, az azt megelőző tagokat pedig a „2, 1, 0” és „2, 2, 0, 0” blokkokkal töltjük fel (például az első megoldásban látott módon). 3 pont

A számok összege ekkor a lehető legnagyobb, és ez $2021+2+2 = 2025$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $CD - AB = BC$. A négyszög B-ből induló külső, és C-ből induló belső szögfelező egyenese M-ben metszi egymást. Igazoljuk, hogy $MA = MD$! **10 pont**



Hosszabbítsuk meg a BC oldalt B felé AB-vel, a kapott pontot jelöljük E-vel! 3 pont

$EC = CD$. 1 pont

Így az ECD háromszög egyenlő szárú, tehát a C-ből induló szögfelező egyben az ED szakasz felező merőlegese, amiből $ME = MD$. 2 pont

$EB = BA$, így az EBA háromszög egyenlő szárú, tehát a B-ből induló belső szögfelező (ami az $ABCD$ négyszög B-ből induló külső szögfelezője) egyben az EA szakasz felező merőlegese, amiből $ME = MA$. 2 pont

A két egyenlőséget egybevetve adódik, hogy $MA = MD$. 2 pont

Összesen: **10 pont**

Megjegyzések a pontozáshoz.

- Amennyiben a tanuló nem a BC oldalt hosszabbítja meg AB-vel, hanem az AB-t BC-vel, 2 pont adható.
- Ha nincs oldalmeghosszabbítás, de a CD oldalt osztja fel AB és BC hosszúságú szakaszokra, 1 pont adható.
- Ha megjelenik az a gondolat, hogy egy egyenlő szárú háromszög szárszögének szögfelezőjének minden pontja egyenlő messze van az alap két végpontjától, további 1 pont adható.

3. 100 kavicsot szeretnénk felosztani kisebb kupacokra. Egy k kupacra történő felosztást jónak nevezünk, ha

- bármely két kupac mérete különböző, és
- akárhogyan is osztjuk szét az egyik kupacot két nála kisebb kupacra, a keletkező $k+1$ kupac között lesz két azonos méretű.

Határozzuk meg k lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét! **10 pont**

Megoldás. Ha $k \geq 14$, akkor a kupacokban legalább $1+2+\cdots+14 = 105$ kavics lenne, ami ellentmondás, tehát $k \leq 13$. $k = 13$-ra a $\{1,2,3,\ldots,11,12,22\}$ felosztás jó: akármelyik kupacot is osztjuk ketté, a két keletkezett kupac mérete közül a kisebb már előfordult. Tehát k lehetséges maximuma 13. Megmutatjuk, hogy a minimum 10. A $\{1,3,5,\ldots,17,19\}$ felosztás jó, hiszen minden kupac kettéosztásakor egy páratlan kupacot osztunk fel egy páros, és egy nála kisebb méretű páratlan méretű kupacra, és minden kisebb páratlan szám már előfordul egy másik kupac méreteként.

Tegyük fel, hogy nincs 1 méretű kupac! Mivel $n = (n-1) + 1$, ezért ha van n méretű kupac, akkor $n-1$ méretű is van. Ezt megismételve adódik, hogy van $n-2$, $n-3, \ldots$ méretű kupac is, ami ellentmondás. Tehát egy jó felosztásban biztosan van 1 méretű kupac.

$(*)$: Ha a legnagyobb kupac mérete $2m+1$, akkor van 1 vagy $2m$, 2 vagy $2m-1$, $\ldots m$ vagy $m+1$ méretű kupac, tehát a kupacok száma legalább m.

Ha a legnagyobb kupac mérete $2m$, akkor van 1 vagy $2m-1$, 2 vagy $2m-2$, $\ldots$, $m-1$ vagy $m+1$ méretű kupac, tehát a kupacok száma legalább m.

Ha $k \leq 8$, akkor a legnagyobb kupac mérete a $(*)$ megállapítás miatt legfeljebb 16. Ekkor a kupacokban együtt legfeljebb $1+16+15+14+\cdots+10 = 92 < 100$ kavics van, ami ellentmondás.

Ha $k = 9$, akkor a legnagyobb kupacban legfeljebb 18 kavics van. Vegyük a legkisebb 10-nél nagyobb méretű kupacot!

Erre alkalmazva a $(*)$ megállapítást adódik, hogy legalább 5 olyan kupac van, aminek a mérete legfeljebb 10. Továbbá a legkisebb 1-nél nagyobb méretű kupac legfeljebb 4 kavicsot tartalmazhat, így a kavicsok száma legfeljebb $1+4+8+9+10+15+16+17+18 = 98 < 100$, ami ellentmondás.

Pontozási útmutató.

- $k \leq 13$ indoklással együtt: 1 pont, indoklás nélkül nem jár pont.
- Konstrukció $k = 13$-ra, és ennek indoklása: $1+1$ pont.
- Konstrukció $k = 10$-re, és ennek indoklása: $1+1$ pont.
- $k \geq 10$ bizonyítása: 5 pont, az alábbi részpontszámok adhatók:
  - Nincs 1 méretű kupac: 1 pont
  - Ha a $(*)$ állítás megjelenik általános formában: 2 pont. Ha a gondolat megjelenik konkrét számra használva, akkor 1 pont adható.
  - A $k \leq 8$ eset tisztázása összesen 3 pontot ér. Ha ez nincs jól megindokolva, akkor az 5-ből legfeljebb 2 pontot kaphat a tanuló a részgondolatokra, akkor is, ha mindkét előző gondolat rendben van.
  - Az utolsó 2 pont a $k = 9$ eset kizárásáért jár, ezt nem osztjuk fel további részpontokra.