

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg az

$$\{x + y\} = \{x\} \cdot \{y\}$$

egyenletet a valós számok halmazán, ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli, vagyis $\{x\} = x - [x]$, ahol $[x]$ az x -nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.

10 pont

2. Adottak a síkon az F_1, F_2, F_3 és T pontok. Szerkesztendő egy $ABCD$ konvex négyszög, amelynek AB, BC és CD oldalainak felezőpontjai rendre F_1, F_2 és F_3 , valamint ATD az AD oldal mint átfogó fölé kifelé emelt derékszögű, egyenlő szárú háromszög. Adjuk meg a szerkesztés lépéseit, illetve hogy mikor létezik ilyen konvex négyszög!

10 pont

3. Legyen $n \geq 4$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ halmazhoz található olyan $B \subseteq \{n + 1, \dots, 2n\}$ halmaz, amelyre az $A \cup B$ halmaz elemeinek szorzata négyzetszám. (Az üres halmaz elemeinek szorzata definíció szerint 1.)

10 pont