Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az

$$\{x+y\} = \{x\} \cdot \{y\}$$

egyenletet a valós számok halmazán, ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli, vagyis $\{x\} = x - [x]$, ahol $[x]$ az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb. **10 pont**

Megoldás. Egy szám törtrésze mindig a $[0,1)$ intervallumba esik. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $\{x\}+\{y\}$ értéke 1-nél kisebb vagy legalább 1. 1 pont

1. eset: $\{x\}+\{y\} < 1$.

Ekkor $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}$, tehát az egyenlet

$$\{x\}+\{y\} = \{x\} \cdot \{y\}$$

alakban is írható. 1 pont

Mindkét oldalhoz 1-et adva, az egyenletet rendezve és szorzattá alakítva:

$$(1-\{x\})(1-\{y\}) = 1.$$ 2 pont

A bal oldalon mindkét tényező pozitív és legfeljebb 1, így a szorzat pontosan akkor 1, ha mindegyikük 1-gyel egyenlő, azaz, ha $\{x\} = \{y\} = 0$. Ebben az esetben tehát pontosan akkor teljesül az egyenlet, ha x és y egészek. 2 pont

2. eset: $\{x\}+\{y\} \geq 1$.

Ekkor $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}-1$, tehát az egyenlet

$$\{x\}+\{y\}-1 = \{x\} \cdot \{y\}$$

alakban is írható. 1 pont

Az egyenletet rendezve és szorzattá alakítva:

$$(1-\{x\})(1-\{y\}) = 0.$$

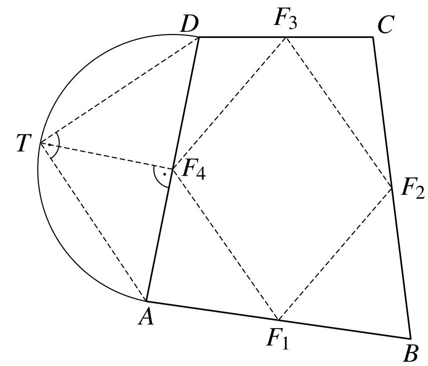
Mivel a bal oldalon mindkét tényező pozitív, nem kapunk megoldást. 2 pont

Tehát az egyenlet megoldásai az egész x, y számpárok. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Adottak a síkon az F_1, F_2, F_3 és T pontok. Szerkesztendő egy $ABCD$ konvex négyszög, amelynek AB, BC és CD oldalainak felezőpontjai rendre F_1, F_2 és F_3, valamint ATD az AD oldal mint átfogó fölé kifelé emelt derékszögű, egyenlő szárú háromszög. Adjuk meg a szerkesztés lépéseit, illetve hogy mikor létezik ilyen konvex négyszög! **10 pont**

Megoldás. Az ábrán F_4 az AD oldal felezőpontját jelöli. Vegyük észre, hogy az F_1-re, F_2-re és F_3-ra vonatkozó középpontos tükrözés, majd a T pont körüli $-90°$-os forgatás egymás után történő elvégzésével az A pont képe önmaga lesz. 1 pont



Az A pont az egyetlen fixpont. 1 pont

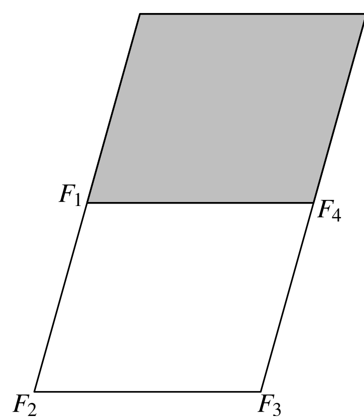
Mivel három középpontos tükrözés szorzata középpontos tükrözés és az új középpont F_4, így $F_1F_2F_3F_4$ paralelogramma. 1 pont

Az F_4 középpontú tükrözés felbontható két egymásra merőleges tengelyes tükrözés szorzatára. 1 pont

Legyen az egyik tengely a TF_4 egyenes. Ekkor a másik tengely az erre merőleges AD egyenes. A T középpontú $-90°$-os forgatás is felbontható két tengelyes tükrözés szorzatára. Legyen az egyik tengely a TF_4 egyenes, ekkor a másik a TA egyenes kell legyen. 1 pont

Így megkapjuk az A pontot az AD és a TA egyenes metszeteként, amelyből a többi pont már tükrözéssel könnyen megkapható. 1 pont

Diszkusszió. Az $F_1F_2F_3F_4$ paralelogrammával egybevágó satírozott paralelogramma $-90°$-kal F_4 körül elforgatva adja azon T pont helyét, amikor egy megoldás van. Ha T nincsen benne az elforgatott, satírozott területben, akkor nem létezik a feladatbeli négyszög. 4 pont



Összesen: **10 pont**

3. Legyen $n \geq 4$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \subseteq \{1,\dots,n\}$ halmazhoz található olyan $B \subseteq \{n+1,\dots,2n\}$ halmaz, amelyre az $A \cup B$ halmaz elemeinek szorzata négyzetszám. (Az üres halmaz elemeinek szorzata definíció szerint 1.) **10 pont**

Megoldás. Konstruktívan állítjuk elő a B halmazt. Ehhez megadunk először egy általános eljárást, amelyről bebizonyítjuk, hogy az $n \neq 8$ esetben működik. Aztán az $n = 8$ esetet elintézzük külön.

Legyen az A halmaz elemei szorzatának prímtényezős felbontása

$$M = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot \ldots \cdot q^{\alpha_q},$$

ahol az α_p-k nemnegatív egész számok, q pedig a legnagyobb, n-et nem meghaladó prím. 1 pont

Minden olyan $3 \leq p \leq q$ prímhez, amelyre α_p páratlan, írjuk elő, hogy a B halmaznak eleme az egyetlen $n < 2^k p \leq 2n$ alakú szám. Ezek nyilván mind különbözők, és ezekkel a szorzatban minden páratlan prím kitevője páros lesz. 2 pont

Ha a 2 így előálló kitevője páros, akkor készen vagyunk, a szorzat négyzetszám. Ha nem páros, akkor írjuk elő, hogy B-nek eleme valamelyik $n < 2m^2 \leq 2n$ alakú szám (ha létezik ilyen, erre alább visszatérünk). Ez nyilván különbözik a korábbiaktól (hiszen $2m^2$ prímtényzetős felbontásában minden páratlan prím páros kitevővel szerepel, míg a korábban B-be választott számok prímtényezős felbontásában van egy-egy páratlan prím, amely páratlan kitevővel szerepel), és a szorzatot nyilván négyzetszámmá teszi (hiszen $2m^2$ prímtényeztős felbontásában a 2 páratlan, minden más prím páros kitevővel szerepel). 2 pont

Az egyetlen kérdés tehát, hogy van-e ilyen $n < 2m^2 \leq 2n$ szám.

A $2m^2$ alakú számok sorozata a 18-tól kezdve olyan, hogy minden eleme kisebb, mint az előző kétszerese. Valóban: $2(m+1)^2 = 2m^2+4m+2 < 4m^2 = 2\cdot 2m^2$, ha $m \geq 3$ (a $2m^2+4m+2 < 4m^2$ azzal ekvivalens, hogy $m^2 > 2m+1$, ami azzal, hogy $(m-1)^2 > 2$, ami $m \geq 3$-ra nyilvánvaló). Következésképp, ha $n \geq 9$, akkor a legkisebb, n-et meghaladó $2m^2$ alakú szám legfeljebb $2n$, tehát létezik az előírt tulajdonsággal. Ha $4 \leq n \leq 7$, akkor a $2m^2 = 8$ megfelelő választás. 2 pont

Egyetlen szálat kell még elvarrnunk, ez az $n = 8$ eset. Legyen $14 \in B$ akkor és csak akkor, ha $7 \in A$. Ezzel a 7 kitevője rendben lesz. A többi prím, ami az A-beli számok szorzatának prímtényezőiként szerepelhet, a 2, a 3 és az 5. Könnyű kézzel ellenőrizni, hogy a $\{10,12,15\}$ halmaz alkalmas részhalmazainak prímtényezős felbontása a

$$2^{\text{páros vagy páratlan}} \cdot 3^{\text{páros vagy páratlan}} \cdot 5^{\text{páros vagy páratlan}}$$

minden lehetőségét kimerítik, tehát a már megkapott (és a 7 prímet páros hatványon tartalmazó) M vagy $M \cdot 14$ szorzat négyzetszámmá szorozható a $\{10,12,15\}$ alkalmas részhalmazával. 3 pont

Összesen: **10 pont**