Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Haladók I. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg azokat az a, b, c pozitív prímszámokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség.

$$a^2+ab+b^2=c^2+3$$ **7 pont**

Megoldás. Ha $c=2$, akkor $a^2+ab+b^2=7$. Mivel $a,b\geq 2$, ezért $a^2+ab+b^2\geq 4+4+4=12$, azaz $c=2$ esetén nem kapunk megoldást. 2 pont

Ha $c>2$ és c prímszám, akkor c páratlan, és így c^2+3 páros szám. 1 pont

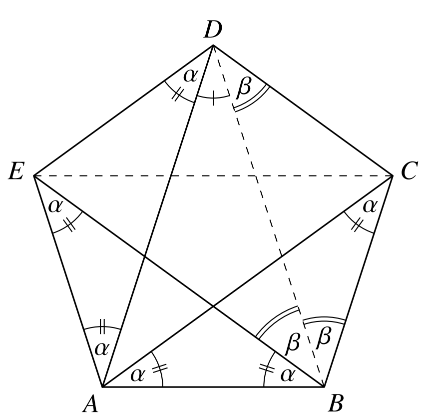
a) Ha a és b is páratlan prímszám, akkor a^2, ab, b^2 és így a^2+ab+b^2 is páratlan szám, tehát nem kapunk megoldást. 1 pont

b) Ha a és b közül az egyik páros, a másik páratlan szám, akkor az a^2, ab, b^2 számok közül kettő páros, egy páratlan, így a^2+ab+b^2 összegük ismét páratlan szám. Így most sem adódik megoldás. 2 pont

c) Ha a és b is páros prímszám, akkor csak $a=b=2$ lehet. Ekkor $c^2+3=2^2+2\cdot 2+2^2=12$ és így $c^2=9\Rightarrow c=3$. Tehát az egyenlet egyetlen megoldása $a=b=2$; $c=3$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy egyenlő oldalú $ABCDE$ ötszögben $AD=AC=BE$. Szabályos-e az ötszög? **7 pont**



1. megoldás. Használjuk az ábrát és a jelöléseit. Ahhoz, hogy az ötszög szabályosságát igazoljuk, elegendő megmutatni, hogy egyenlők a szögei.

Mivel megfelelő oldalaik egyenlő hosszúak, ezért az ABC, a DEA és az EAB háromszögek egybevágó egyenlő szárú háromszögek. A háromszögek alapon fekvő szögei mind egyenlők, ezt a hat szöget ($BAC\sphericalangle=BCA\sphericalangle=\ldots=EAD\sphericalangle$) a továbbiakban α-val jelöljük. 1 pont

Továbbá az előzőek miatt az ötszög csúcsainál

$$A\sphericalangle(=BAE\sphericalangle)=B\sphericalangle(=ABC\sphericalangle)=E\sphericalangle(=DEA\sphericalangle)$$

is teljesül. 1 pont

Másfelől $AD = AC$ miatt ADC is egyenlő szárú háromszög, azaz $ADC\sphericalangle = ACD\sphericalangle$, valamint $ADE\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \alpha$ miatt az ötszög csúcsainál $C\sphericalangle(= BCD\sphericalangle) = D\sphericalangle(= CDE\sphericalangle)$. 1 pont

A $BCDE$ négyszög szimmetrikus trapéz (alapjai CD, illetve BE), mivel a megfelelő csúcsnál lévő szögei $B\sphericalangle$-nél és $E\sphericalangle$-nél α-val kisebbek, $C\sphericalangle$-nél és $D\sphericalangle$-nél pedig egyenlőek az ötszög ezeknél a csúcsoknál lévő szögeivel, és így $CBE\sphericalangle = BED\sphericalangle$ és $BCD\sphericalangle = CDE\sphericalangle$. 1 pont

Mivel $CD \parallel BE$, ezért $CDB\sphericalangle = DBE\sphericalangle$, hiszen váltószögek. Jelöljük ezt a szöget a továbbiakban β-val. Mivel $BC = CD$, ezért a BCD egyenlő szárú háromszögben is $CBD\sphericalangle = CDB\sphericalangle = \beta$. 1 pont

Másfelől, mivel megfelelő oldalaik ($AB = DE$; $BD = BD$ és $AD = BE$) megegyeznek, ezért ABD és EDB háromszögek egybevágóak, és így $EDB\sphericalangle = ABD\sphericalangle = \alpha + \beta$.

De akkor az ötszögben: $B\sphericalangle(= ABC\sphericalangle) = ABD\sphericalangle + CBD\sphericalangle = (\alpha + \beta) + \beta = \alpha + 2\beta$ és $D\sphericalangle(= CDE\sphericalangle) = CDB\sphericalangle + BDE\sphericalangle = \beta + (\alpha + \beta) = \alpha + 2\beta$. Azaz az ötszögben $B\sphericalangle = D\sphericalangle$, és így a korábbiak miatt az ötszög valamennyi szöge ugyanakkora. 2 pont

Azaz az $ABCDE$ ötszög valóban szabályos.

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Jelöljük az ismeretlen $AC = AD = BE$ hosszúságot x-szel, az ugyancsak ismeretlen $AB = BC = CD = DE = EA$ hosszúságot y-nal. 1 pont

Ha x és y egy létező ötszög oldal- és átlóhossza, akkor létezik olyan háromszög, amelynek oldalai x, y és y hosszúságúak. 1 pont

Az x és y egyértelműen meghatározza az ABC egyenlő szárú háromszöget, 1 pont

ugyancsak egyértelműen megkapható az ABE egyenlő szárú háromszög, vagyis az E csúcs, 1 pont

továbbá a szintén egyértelműen kapható AED egyenlő szárú háromszög alapján a D csúcs is. 1 pont

Ezért az x és az y ismeretében az ötszög egyértelműen meghatározott. 1 pont

Tekintettel arra, hogy az adott tulajdonságokkal ($AC = AD = BE$ és $AB = BC = CD = DE = EA$) a szabályos ötszög rendelkezik, ezért az (x és y által egyértelműen meghatározott) $ABCDE$ ötszög csakis az x oldalhosszúságú szabályos ötszög lehet. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^4 - 11x^2 + 25 = -6x + 9$$ **7 pont**

Adjunk mindkét oldalhoz x^2-et. Adódik $x^4 - 10x^2 + 25 = x^2 - 6x + 9$. 2 pont

Teljes négyzeteket kialakítva kapjuk: $(x^2 - 5)^2 = (x - 3)^2$. 1 pont

Két eset lehetséges: $x^2 - 5 = x - 3$ vagy $x^2 - 5 = -x + 3$. 1 pont

– Ha $x^2 - 5 = x - 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$, ennek gyökei $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. 1 pont

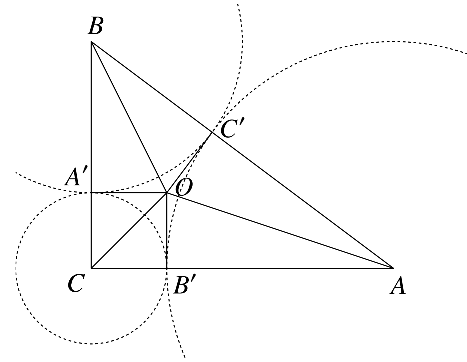
– Ha pedig $x^2 - 5 = -x + 3 \Rightarrow x^2 + x - 8 = 0$, ennek gyökei $x_3 = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{2}$ és $x_4 = \dfrac{-1 - \sqrt{33}}{2}$. 1 pont

Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, mind a négy gyök kielégíti az egyenletet. (Az ekvivalens átalakításokra való hivatkozás kiváltható a megoldások leellenőrzésével.) 1 pont

Összesen: 7 pont

4. A síkon három kör páronként kívülről érinti egymást. Sugaruk 1, 2, illetve 3 egységnyi. Milyen messze van a három kör középpontja által meghatározott háromszögbe írt kör középpontja a háromszög csúcsaitól? **7 pont**

Megoldás. Használjuk mellékelt ábrát.



Legyen a 3 egység sugarú kör középpontja A, a 2 egység sugarúé B és az 1 egység sugarúé C, míg A', B' és C' a körök páronként vett érintkezési pontjai, amelyek egyúttal az ABC háromszögbe írt körnek a háromszög oldalaival vett közös pontjai. Ekkor $AB=(c=)3+2=5$, $AC=(b=)3+1=4$ és $BC=(a=)2+1=3$. 1 pont

Mivel a 3, 4, 5 pitagoraszi számhármas, ezért az ABC háromszög (C-nél) derékszögű. 1 pont

Az ismert képlet alapján (vagy az $A'CB'O$ négyzetet észrevéve) a derékszögű ABC háromszögbe írható kör sugara $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{3+4-5}{2}=1$. (Ez a kétféleképpen felírt $2t=a\cdot b=r\cdot(a+b+c)$ alapján is megkapható.) 1 pont

Azaz a beírt kör O középpontja 1 távol van valamennyi oldaltól. 1 pont

Mivel a beírt kör valamely oldallal vett érintési pontjába húzott sugár merőleges az oldalra, a hat darab $OB'A$, OAC', …, OCB' háromszög mind olyan derékszögű háromszög, amelynek egyik befogója egységnyi (mivel $r=1$), míg a másik befogó valamelyik eredeti kör sugara, 1 pont

a beírt kör O középpontjának a csúcsoktól vett távolsága pedig éppen az átfogó. Így Pitagorasz tételét háromszor alkalmazva a megfelelő derékszögű háromszögekre adódik, hogy $OA=\sqrt{10}$, $OB=\sqrt{5}$ és $OC=\sqrt{2}$ hosszú.

Azaz a beírt kör középpontja rendre $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$ és $\sqrt{2}$ távol van az A, B és C csúcsoktól. 2 pont

Összesen: **7 pont**

5. Az $\{1;2;3;\ldots;100\}$ halmaznak hány olyan háromelemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege 100? **7 pont**

1. megoldás. – Ha a legkisebb kiválasztott szám az 1, a másik kettő összege 99, azaz a további két számra a lehetőségek a $2;97$, a $3;96$, … és a $49;50$ lehet, ami 48 lehetőség. 1 pont

– Ha a legkisebb kiválasztott szám a 2, akkor a másik kettő összege 98, azaz a további két számra a lehetőségek a $3;95$, a $4;94$, … és a $48;50$ lehet, ami 46 lehetőség. 1 pont

– Ha a legkisebb kiválasztott szám a 3, akkor a másik kettő összege 97, azaz a további két számra a lehetőségek a $4;93$, az $5;92$, … és a $48;49$, ami 45 lehetőség. 1 pont

Látható, hogy a paritástól függően az esetek száma kettővel, illetve eggyel csökken, amikor a legkisebb kiválasztott számot eggyel növeljük. 2 pont

Az utolsó lehetőség a 32; 33; 35. 1 pont

Tehát a válasz a feladat kérdésére

$$(48+46)+(45+43)+\ldots+(3+1)=94+88+\ldots+4=\frac{16\cdot 98}{2}=784.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. *(Lehetséges a következő, kissé formálisabb érvelés is.)*

Legyenek k és m olyan pozitív egészek, amelyekre $k < k+m < 100-(2k+m)$. Ekkor a $\{k; k+m; 100-(2k+m)\}$ egy megfelelő háromelemű részhalmaz, és minden megfelelő részhalmaz elő is áll ilyen alakban (ahol k a legkisebb elem, míg m a két kisebb elem különbsége). 1 pont

A $k < 100-(2k+m)$ feltételt k-ra rendezve azt kapjuk, hogy $k < \dfrac{100-m}{3}$, azaz $m \geq 1$ miatt $k \leq 32$. 1 pont

A $k+m < 100-(2k+m)$ feltételt pedig m-re rendezve $m < 50-1{,}5k$ adódik. 1 pont

Vizsgáljunk meg néhány esetet:

Ha $k=1 \Rightarrow m < 50-1{,}5 \Rightarrow m \leq 48$. Ezzel a következő halmazokat kapjuk: $\{1;49;50\}$, $\{1;48;51\}$, $\{1;47;52\}$, … , $\{1;2;97\}$, ez 48 db megfelelő halmaz, mivel m ennyi különböző értéket vehet fel.

Ha $k=2 \Rightarrow m < 50-1{,}5\cdot 2 \Rightarrow m \leq 46$. Ezzel a $\{2;48;50\}$, $\{2;47;51\}$, …, $\{2;3;95\}$ megfelelő halmazokat kapjuk, ez 46 db.

Ha $k=3 \Rightarrow m < 50-1{,}5\cdot 3 \Rightarrow m \leq 45$, innen a $\{3;48;49\}$, $\{3;47;50\}$, …, $\{3;4;93\}$, halmazok adódnak, ez 45 db.

Ezt tovább folytatva legutoljára azt az esetet kapjuk, amikor $k=32 \Rightarrow m < 50-1{,}5\cdot 32 \Rightarrow m \leq 1$, ekkor az egyetlen megfelelő halmaz a $\{32;33;35\}$. 2 pont

A nagyságrendi megkötések miatt a fenti halmazok mind különbözőek.

Ahogyan k-t növeljük egyesével, úgy a lehetséges m-ek száma (a becslésben szereplő $-1{,}5\cdot k$ miatt) felváltva 1-gyel, illetve 2-vel csökken a megelőző esethez képest, vagyis a megfelelő halmazok száma $48+46+45+43+42+40+39+\ldots+4+3+1 = \dfrac{32\cdot 49}{2} = 784$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás. Jól ismert, és nem is nehéz belátni, hogy ha a sorrend is számít, akkor $\binom{99}{2}$-féle módon lehet a 100-at három pozitív egész szám összegére bontani. 2 pont

Mivel a 100-at három egyforma számra nem lehet bontani, így ebből azokat az eseteket kell kivonni, amelyekben két egyforma szám van: 1 pont

ez $49\cdot 3$-féle lehetőség (mert a két egyforma szám 49-féle lehet, és a lehetséges sorrendek száma 3). 1 pont

A megmaradó eseteket 6-szor számoltuk, hiszen három különböző számnak hatféle sorrendje lehetséges. 1 pont

Így a válasz:

$$\frac{\binom{99}{2}-49\cdot 3}{6} = \frac{\frac{99\cdot 98}{2}-49\cdot 3}{6} = \frac{99\cdot 49-49\cdot 3}{6} = \frac{96\cdot 49}{6} = 16\cdot 49 = 784.$$ 2 pont

Összesen: 7 pont