Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Haladók I. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Milyen pozitív egész a, b, c értékekre teljesülnek a $\frac{2a}{2+a} = \frac{3b}{3+b} = \frac{4c}{4+c}$ egyenlőségek? **7 pont**

1. megoldás. $\frac{2a}{2+a} < 2$, mert a pozitív nevezővel szorozva, majd $2a$-t kivonva (amelyek ekvivalens lépések) $0 < 4$ adódik. 1 pont

Az előző egyenlőtlenség teljesülése miatt az $\frac{4c}{4+c} < 2$ egyenlőtlenségből szintén (az előzőhöz hasonló) ekvivalens lépésekkel kijön, hogy $c < 4$. Tehát csak $c = 1$, 2 vagy 3 lehet. 2 pont

Oldjuk meg a $\frac{2a}{2+a} = \frac{4c}{4+c}$ egyenletet $c = 1, c = 2, c = 3$ esetekben.

$c = 1$ esetén $\frac{2a}{2+a} = \frac{4}{5}$ megoldása $a = \frac{4}{3}$ nem egész. 1 pont

$c = 2$ esetén $\frac{2a}{2+a} = \frac{8}{6}$ megoldása $a = 4$, de $\frac{3b}{3+b} = \frac{8}{6}$ megoldása $b = \frac{12}{5}$ nem egész. 1 pont

$c = 3$ esetén $\frac{2a}{2+a} = \frac{12}{7}$ megoldása $a = 12$, és $\frac{3b}{3+b} = \frac{12}{7}$ megoldása $b = 4$. 1 pont

Azaz az egyenlet egyetlen megoldása: $a = 12$, $b = 4$, $c = 3$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. $\frac{2a}{2+a} = \frac{4c}{4+c}$ egyenlőségből átrendezés után $ac - 4a + 4c = 0$ adódik. 1 pont

Mindkét oldalból 16-ot kivonva a bal oldal szorzattá alakítható: $(a+4)(c-4) = -16$. 1 pont

Mivel $a+4$ biztosan pozitív, ezért $c-4$ negatív kell legyen, ezért csak $c = 1$, 2 vagy 3 lehet. 1 pont

Innen hasonlóan az 1. megoldáshoz végignézzük 1-1-1 pontért a három esetet. 3 pont

Azaz az egyenlet egyetlen megoldása: $a = 12$, $b = 4$, $c = 3$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Négy jóbarát észrevette, hogy ha elosztják a könyveik számát a könyvek számában a számjegyek összegével, akkor eredményül mind a négyen ugyanazt az egész számot, 13-at kapják. Bizonyítsuk be, hogy legalább kettejüknek ugyanannyi könyve van.

(Ha valamelyik barátnak például 63 könyve lenne, akkor ő eredményül $63 : (6+3) = 7$-et kapna.) **7 pont**

Megoldás. Legyen Kálmánnak (az egyik jóbarátnak) k darab könyve. A feladat állítása alapján 13 osztója k-nak. Ha Kálmán eredményül 13-at kapott, akkor k nyilván nem lehet egyjegyű szám. Másfelől 13 kétjegyű többszöröseiben, azaz a $13, 26, 39, 52, 65, 78$ és 91 számokban a számjegyösszeg rendre 4, 8, 12, 7, 11, 15 és 10, és ezek egyike sem osztható 13-mal, azaz k kétjegyű szám sem lehet. 1 pont

Ha k négyjegyű szám, azaz $k = \overline{abcd}$ alkalmas a, b, c, d számjegyekkel, akkor $a+b+c+d \leq 36$ miatt $k = \overline{abcd} \leq 13 \cdot 36 = 468$ lenne, ami ellentmondásban áll azzal, hogy k négyjegyű szám. 1 pont

Ha k több mint négyjegyű szám lenne, akkor hasonló ellentmondást kapnánk mint az imént, azaz $k = \overline{abc}$ alakú háromjegyű szám lehet csak (ahol a, b, c számjegyek, és $a > 0$).

Az eddigiek alapján a $100a + 10b + c = 13a + 13b + 13c$ összefüggésnek kell teljesülnie, 1 pont

vonjunk ki $(13a + 10b + c)$-t mindkét oldalból: $87a = 3b + 12c$ adódik, majd 3-mal osztva azt kapjuk, hogy $29a = b + 4c$. 1 pont

Mivel a, b és c számjegyek $29a = b + 4c \leq 5 \cdot 9 = 45$, így $a = 1$ lehet csak. Ekkor $29 = b + 4c$. Mivel a bal oldalon 4-gyel osztva 1 maradékot adó szám szerepel, így b is ilyen, azaz $b = 1$, 5 vagy 9 lehet csak. Ezeket az értékeket beírva b helyére a $29 = b + 4c$ egyenletbe rendre $c = 7$, 6 és 5 adódik. 1 pont

Azaz a könyvek k számára három megoldás 195; 156 és 117 kapható. 1 pont

(Ellenőrzés: $\dfrac{195}{1+9+5} = \dfrac{195}{15} = 13$, $\dfrac{156}{1+5+6} = \dfrac{156}{12} = 13$ és $\dfrac{117}{1+1+7} = \dfrac{117}{9} = 13$.)

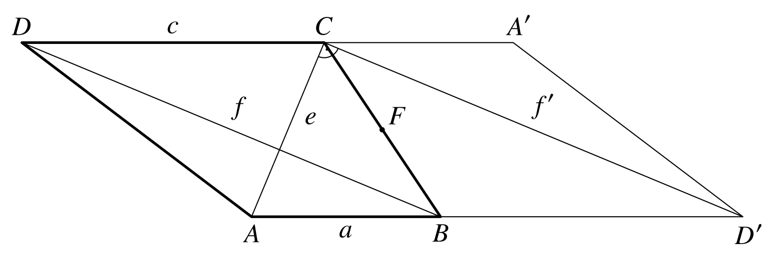
Mivel 4 barát van és 3 különböző könyvszám lehet csak, így a skatulyaelv miatt biztosan van legalább 2 barát, akinek ugyanannyi könyve van, és éppen ezt akartuk megmutatni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy trapéz átlói 5 és 12, két alapjának összege pedig 13 egység hosszú.

a) Mekkora a trapéz területe?
b) Lehet-e a trapéz minden oldalának hossza egész szám? **7 pont**

1. megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit! Legyen $AB = a$, $CD = c$, $AC = e$ és $BD = f$.



Tükrözzük az $ABCD$ trapézt például a BC szár F felezőpontjára. 1 pont

Ekkor az $AD'A'D$ paralelogrammához jutunk, amelyben az e, f', valamint az $AD' = a + c = 13$ szakaszok hosszai pitagoraszi számhármast alkotnak. Tehát az ACD' háromszög derékszögű. 1 pont

Mivel a trapéz területe azonos az ACD' derékszögű háromszög területével ($T_{\text{trapéz}} = \frac{a+c}{2} \cdot m = \frac{e \cdot f}{2} = T_{\text{háromszög}}$), így a keresett terület $T_{\text{trapéz}} = \frac{e \cdot f}{2} = 30$. 1 pont

A feladat második részéhez válasszuk az átlók metszéspontját M-nek.

A megfelelő szögeik egyenlősége miatt $AMB\triangle \sim CMD\triangle$, így a megfelelő oldalaik aránya azonos. 1 pont

Feltételezve, hogy $AB \le CD$, a rövidebb oldal $AB = 1$; 2; 3; 4; 5; 6 lehet. Felhasználva az $AMB\triangle \sim CMD\triangle$ hasonlóságot, könnyen számolható a trapéz szárának hossza. A BC és AD az AB alap egyetlen egész értéke esetén sem ad egész hosszt. (Pl. $AB = 1$ esetén $MA = \frac{5}{13}$, $MD = \frac{144}{13}$. Ekkor az AMD (az átlók merőlegessége miatt) derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele alapján $AD^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{144}{13}\right)^2$ nem ad egész megoldást.)

A 3 pont az összes eset megvizsgálására adható. 3 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. A feladat második részére, azaz a javítókulcs utolsó négy pontjára a következő indoklás is elképzelhető:

Az esetvizsgálat helyett általánosan is felírhatjuk a BC szárra a Pitagorasz-tételt.

Vezessük be a következő jelöléseket: $MC = x$; $MD = y$. Ekkor a korábbi hasonlóságot felhasználva ($AMB\triangle \sim CMD\triangle$) a következőket kapjuk:

$$\frac{x}{5-x} = \frac{y}{12-y} = \frac{c}{13-c}.$$ 1 pont

Az x és y értékeket kifejezve:

$$\frac{x}{5-x} = \frac{c}{13-c} \qquad \frac{y}{12-y} = \frac{c}{13-c}$$

$$13x = 5c \qquad 13y = 12c$$

$$x = \frac{5}{13}c \qquad y = \frac{12}{13}c$$ 1 pont

$$BC^2 = x^2 + (12-y)^2 = \left(\frac{5}{13}c\right)^2 + \left(12 - \frac{12}{13}c\right)^2 =$$ 1 pont

$$= \underbrace{\frac{25}{169}c^2 + 144 + \frac{144}{169}c^2}_{= c^2 + 144 \in \mathbb{Z}} - \frac{288c}{13}$$

Mivel $0 < c < 13$, és a 13 nem osztója a 288-nak, ezért $\frac{288}{13}c$ értéke nem lehet egész. Tehát nem lehet a trapéz minden oldala egész. 1 pont

4. Leteszünk az asztalra egymás mellé egy sorba 20 pénzérmét úgy, hogy 10-nél a Fej, 10-nél az Írás legyen felül. Igazoljuk, hogy biztosan lesz egymás mellett 10 olyan érme, amelyből 5-nél Fej, 5-nél Írás van felül. **7 pont**

Megoldás. Számozzuk meg a húsz letett érmét sorban 1-20-ig, és nevezzünk „blokknak" tíz szomszédos érmét. Tehát az első blokk az 1.-10. érme, a második a 2.-11. érme, ..., az utolsó a 11.-20. érme.

Nézzük meg, hány Fej van az első blokkban (az első 10 érme között). Ha pontosan 5, akkor készen vagyunk. 1 pont

Ha 5-nél kevesebb, akkor az utolsó 10 érme között nyilván 5-nél több Fej van. 1 pont

Haladjunk az első blokk felől az utolsó blokkig egyesével. Amikor egy ilyen blokkról a szomszédosra lépünk, a korábbi blokk első érméje kicserélődik a következő blokk utolsó érméjére. 1 pont

A Fejek száma tehát a következőképpen változhat:

– ha Fejet cseréltünk Fejre, akkor nem változik,

– ha Írást cseréltünk Írásra, akkor sem változik,

– ha Fejet cseréltünk Írásra, 1-gyel csökken,

– ha Írást cseréltünk Fejre, akkor 1-gyel nő. 1 pont

Tehát a Fejek száma a szomszédos blokkra áttérve vagy nem változik, vagy 1-gyel változik. 1 pont

Emiatt, mivel az első blokkban 5-nél kisebb, az utolsóban 5-nél nagyobb a Fejek száma, kell hogy legyen egy olyan blokk, amelyben 5 Fej és 5 Írás van. 1 pont

Ha pedig az első blokkban 5-nél több Fej van, akkor az utolsóban 5-nél kevesebb, és a fenti indoklás pontosan ugyanúgy működik. 1 pont

Összesen: **7 pont**