

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Adott hét különböző prímszám. Válasszunk ki közülük az összes lehetséges módon kettőt, és vegyük a kiválasztott párok különbségeinek abszolútértékeit. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett számok szorzata osztható 4320^2 -nel. **7 pont**
2. Rózi unatkozik a matematika órán, ezért a 30-nál nem nagyobb pozitív prímek közül kiválaszt három egymástól nem feltétlenül különböző p , q és r számot, és kiszámítja a $px^2 + qx + r = 0$ másodfokú egyenlet gyökeit. Mely $(p; q; r)$ számhármakat választhatja Rózi, ha tudjuk, hogy egyenletének legalább az egyik gyöke egész szám? Hány megfelelő számhármak van? **7 pont**
3. Az AB átfogójú derékszögű háromszög harmadik csúcsa C . Az A csúcsnál lévő belső szög felezője az M , a külső szög felezője pedig az N pontban metszi az átfogóhoz tartozó magasságot, míg a B csúcsnál lévő belső szög felezője az P , a külső szög felezője pedig az Q pontban metszi az átfogóhoz tartozó magasságot. Bizonyítsuk be, hogy
$$CM \cdot CN + CP \cdot CQ = AB^2.$$
 7 pont