Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy sorozat első tagja a 23. A további tagokat a következőképpen képezzük:

– ha a tag 3-mal osztható, akkor elosztjuk 3-mal,
– ha 3-mal osztva 1 a maradéka, akkor a szám 5-szörösénél 4-gyel nagyobb szám lesz a következő tag,
– ha 3-mal osztva 2 a maradéka, akkor növeljük 7-tel.

Határozd meg a sorozat első 2023 tagjának összegét! **6 pont**

Megoldás. A sorozat így kezdődik: 23, 30, 10, 54, 18, 6, 2, **9, 3, 1,** 9, 3, 1, ... 1 pont

Innentől kezdve a 9, 3, 1 számok ismétlődnek. 1 pont

Az elő hét tag összege 143. 1 pont

$2023 - 7 = 2016$, ami osztható 3-mal.

$2016 : 3 = 672$-szer ismétlődik a 9, 3, 1, 1 pont

ezek összege 13, 1 pont

így a sorozat első 2023 tagjának összege: $143 + 672 \cdot 13 = 8879$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Hány olyan nyolcjegyű pozitív szám van, amely csak 2-es és 4-es számjegyet tartalmaz és osztható 24-gyel? **6 pont**

Megoldás. $24 = 2^3 \cdot 3$, így szükséges és elégséges feltétel a 8-cal és a 3-mal való oszthatóság. 1 pont

A 8-cal való oszthatóság szükséges feltétele, hogy a szám 4-gyel osztható legyen, emiatt az utolsó két számjegy 24 vagy 44. A százasok helyi értékén is csak 2-es vagy 4-es számjegy állhat, az adódó négy esetből csak a 224 és a 424 osztható 8-cal, a 244 és a 444 nem, tehát a keresett szám utolsó három számjegye 224 vagy 424. 1 pont

Mivel $2 + 2 + 4 = 8$, illetve $4 + 2 + 4 = 10$, az első esetben a maradék öt számjegy összegének 3-mal vett osztási maradéka 1, az utóbbiban 2 kell, hogy legyen. 1 pont*

I. eset: ha a szám végződése 224: az öt helyen lehet *A)* 0 db 4-es és 5 db 2-es vagy *B)* 3 db 4-es és 2 db 2-es, az ilyen számok darabszáma rendre 1, illetve 10. 1 pont

II. eset: ha a szám végződése 424: az öt helyen lehet *A)* 0 db 2-es és 5 db 4-es vagy *B)* 3 db 2-es és 2 db 4-es, az ilyen számok darabszáma rendre 1, illetve 10. 1 pont

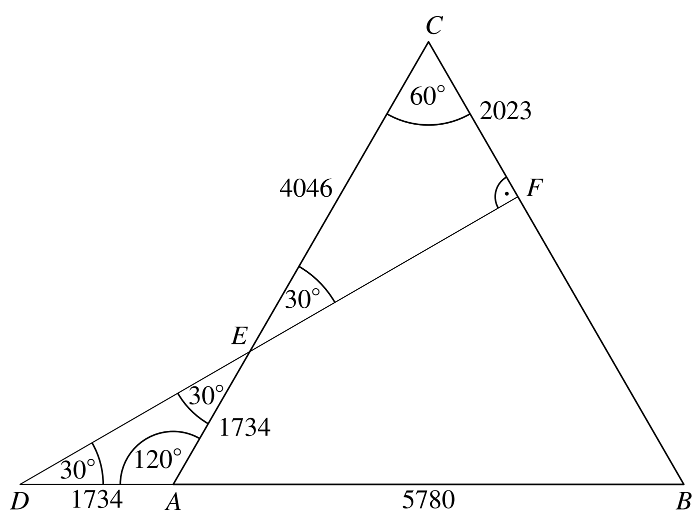
Válasz: Tehát összesen 22 db ilyen szám van. 1 pont

* Ha a versenyző az első öt helyi értéken szereplő 2-es és 4-es számjegyek darabszámára vonatkozóan az összes lehetséges esetet megvizsgálja mindkét végződés esetén, mindegyik esetben indokolja, hogy az adhat-e megoldást vagy sem, és így jut arra a következtetésre, hogy a két végződés esetén mennyi lehet a 2-esek és a 4-esek darabszáma, akkor ezt a pontot kapja meg.

Összesen: **6 pont**

3. Egy ABC szabályos háromszög oldalai 5780 egység hosszúak. Az AB oldalt meghosszabbítjuk A-n túl 1734 egységgel, így kapjuk a D pontot. Az AC oldalon E az a pont, amelyre teljesül, hogy AE és EC szakaszok hosszának aránya 3 : 7. A DE egyenes a BC szakaszt az F pontban metszi. Hány egység hosszú a CF szakasz? **6 pont**

Megoldás. Ha az 5780 egység hosszú AC oldalt felosztjuk 3 : 7 arányban, akkor AE hossza 1734 egység lesz ($CE = 4046$), 1 pont



$AD = AE$, tehát az ADE háromszög egyenlő szárú, 1 pont

és (mivel a szabályos háromszög külső szöge, DAE 120°-os) az ADE háromszögben a D és E csúcsnál 30°-os szögek vannak. 1 pont

Lévén a DEA szög csúcsszöge, a CEF szög is 30°, és mivel a CEF háromszögben C-nél 60° van, ezért a CFE szög 90°. 1 pont

Ezért a CFE háromszög egy félszabályos háromszög. 1 pont

Ebből következik, hogy a CF oldal hossza a CE oldal hosszának a fele: $4046 : 2 = 2023$ egység. 1 pont

Összesen: **6 pont**

4. A Kosárlabda Diákolimpia döntőjében a mérkőzés első felében András 20 próbálkozásból 15, míg a második félidőben 10 kísérletből 10 kosarat szerzett. Balázs az első félidőben 12-szer, míg a másodikban 18-szor dobott kosárra. András mindkét félidőben nagyobb százalékban volt eredményes, mint Balázs, de meglepő módon a mérkőzés végéig mindketten ugyanannyiszor találtak be. Hány kosárral szerzett többet a második félidőben Balázs, mint az elsőben? **6 pont**

Megoldás. Jelölje rendre x és y ($x, y \in \mathbb{N}$) Balázs találatainak számát az első, illetve a második félidőben. Ekkor a találati arányokat megadó táblázat:

Személy	1. félidő	2. félidő
András	$\frac{15}{20}$	$\frac{10}{10}$
Balázs	$\frac{x}{12}$	$\frac{y}{18}$

1 pont

A feladat feltételei alapján:

$\frac{x}{12} < \frac{15}{20}$, ahonnan $x \leq 8$. 1 pont

$\frac{y}{18} < \frac{10}{10}$, ahonnan $y \leq 17$. 1 pont

$x + y \leq 8 + 17 = 25$, a szöveg szerint viszont $x + y = 25$. 1 pont

A feltételeknek megfelelő megoldás $x = 8$, $y = 17$, 1 pont

innen $y - x = 9$. Tehát Balázs a második félidőben 9-cel szerzett több találatot, mint az elsőben. 1 pont

Összesen: **6 pont**