Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

Kezdők I–II. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Ádám kiszámította a $10^{2023}+10^{2018}+10^{2013}+\ldots+10^{18}+10^{13}+10^{8}+10^{3}$ összeget, és leírta az eredményt. Hány darab 0 számjegyet írt le Ádám? **6 pont**

Megoldás. 10^n: $n+1$ jegyű szám, amely n darab 0-ra végződik ($n \in \mathbf{N}^+$), az első számjegy pedig 1. Mivel a feladatban szereplő összeg utolsó tagja 10^3, ezért a szám végén van 3 db 0 jegy, és előttük 1 db 1-es áll. 1 pont

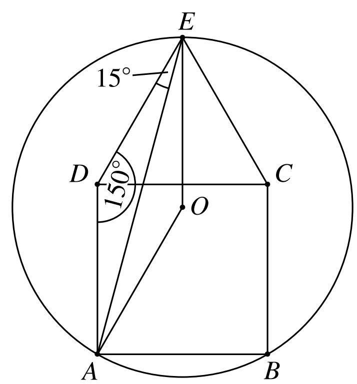
Ezután minden hatvány 4 db 0-val és 1 db 1-essel növeli a szám jegyeit. 2 pont

Ez a növelés 404-szer történik, mert $2023 = 3 + 5 \cdot 404$. 2 pont

Ezért az eredmény $404 \cdot 4 + 3 = 1619$ db 0 számjegyet tartalmaz. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Egy $ABCD$ négyzet CD oldalára kifelé szabályos háromszöget rajzolunk, amelynek harmadik csúcsa E. Rajzoljuk meg az ABE háromszög körülírt körét. Bizonyítsuk be, hogy ennek a körnek a sugara és az $ABCD$ négyzet oldala egyenlő. **8 pont**



1. megoldás. Vegyük fel a kör középpontját (O), és kössük össze A-val és E-vel. 1 pont

Húzzuk be az AE szakaszt.

Be fogjuk látni, hogy AEO és AED egybevágó háromszögek. Mivel mindkettő egyenlő szárú és közös az alapjuk, ezért elegendő szögeik (egy megfelelő szögük) egyenlőségét megmutatni.

Az ADE egyenlő szárú háromszög, 1 pont

a D-nél lévő szárszöge 150°, 1 pont

mert a négyzet és a szabályos háromszög egy-egy belső szögének összege.

Tehát a $DEA\sphericalangle$ és az $DAE\sphericalangle$ egyaránt 15°-os. 1 pont

Az EO egyenes a szabályos háromszög (és a négyzet) szimmetriatengelye (mert O és E is rajta van AB szakaszfelező merőlegesén, mert $OA = OB$ és $EA = EB$), ezért a $DEO\sphericalangle = 30^\circ$, 1 pont
ebből a $DEA\sphericalangle = 15^\circ$-ot tesz ki, tehát az $AEO\sphericalangle = 15^\circ$. 1 pont

Vagyis az AEO egyenlő szárú háromszög szögei szintén 15°, 15° és 150°, tehát egybevágó az AED háromszöggel. 1 pont

Tehát $AO = AD$, vagyis a négyzet oldala és a kör sugara egyenlő. 1 pont

Összesen: 8 pont

2. megoldás. Vegyük fel a kör középpontját (O), és kössük össze A-val, E-vel és B-vel. 1 pont

Az $AOED$ négyszög deltoid, mert $AO = OE$ (a kör sugarai), és $AD = DE$. 1 pont
$DEO\sphericalangle = 30^\circ$, mert az O és E pontok illeszkednek az AB szakasz felezőmerőlegesére – amely egyben DC felezőmerőlegese is –, tehát OE felezi a $CED\sphericalangle$-et. 2 pont

Mivel $AOED$ deltoid, ezért $DAO\sphericalangle$ is 30°, 1 pont
ezért az $OAB\sphericalangle = 60^\circ$. 1 pont

Vagyis az OAB egyenlő szárú háromszög (tudjuk, hogy $OA = OB$) szabályos, 1 pont
tehát minden oldala egyenlő hosszú.

Tehát $OA = AB$, azaz a négyzet oldala és a kör sugara egyenlő. 1 pont

Összesen: 8 pont

3. Van 9 kártyánk, amelyekre rendre az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok vannak felírva úgy, hogy minden lapon pontosan egy számjegy található. Az összes kártya felhasználásával számokat alakítunk ki (például 8, 213, 49 és 657). Mennyi a képzett számok összegének a legkisebb értéke,
a) ha az összes képzett szám prím, illetve
b) ha az összes kialakított szám összetett? **8 pont**

Megoldás. Mindkét esetben arra kell törekedni, hogy a képzett számok minél kevesebb jegyből álljanak, vagyis lehetőleg egy- vagy kétjegyűek legyenek, és közöttük minél több legyen az egyjegyű szám. 1 pont

a) A prímszámok kialakításánál a 4, 6, 8 számjegyek nem szerepelhetnek az egyes helyiértéken, a 2 és az 5 pedig csak akkor, ha nincs mellettük más számjegy. 1 pont

Így a megalkotott számok összege nem lehet kevesebb, mint

$$10\cdot(4+6+8)+(1+2+3+5+7+9)=207.$$ 1 pont

Ez az összeg megvalósítható például a 2, 3, 5, 41, 67, 89 számok segítségével. 1 pont

b) Mivel a felsorolt számjegyek között 4 összetett szám található (4, 6, 8, 9), ezért a maradék 5 számjegy segítségével legalább 3 kétjegyű számot kell képezni. 1 pont

A legkisebb összeg esetén a legkisebb számjegyeknek (1, 2, 3) kell a tízes helyiértéken szerepelnie. 1 pont

Így ebben az esetben a megalkotott számok összege nem lehet kevesebb, mint

$$10\cdot(1+2+3)+(4+5+6+7+8+9)=99.$$ 1 pont

Ez az összeg megvalósítható például a 6, 8, 9, 15, 27, 34 számok segítségével. 1 pont

Összesen: 8 pont

4. Egy légitársaság járataira egy személy csak adott tömegű csomagot vihet magával ingyenesen, ezen felül kilogrammonként valamekkora pótdíjat kell fizetni. Egy házaspár együtt 99 kg tömegű csomagot vitt magával, amiért 90, illetve 120 dollár pótdíjat fizettek. Egy másik utasnak egyedül 99 kg tömegű csomagja volt, és ezért 402 dollár pótdíjat fizetett. Mekkora tömegű poggyász vihető fel a gépre személyenként díjmentesen? Mennyi volt a házaspár poggyászainak tömege? **8 pont**

1. megoldás. A házaspár a 99 kg-ért együtt 210 \$ pótdíjat fizetett, ami 192 \$-ral kevesebb, mint amit az egyedül utazó utas fizetett 99 kg-ért. 1 pont

Ez a különbség abból adódott, hogy ők ketten voltak, így az ingyenesen felvihető mennyiséget kétszer vették igénybe. Vagyis az ingyenesen felvihető tömeg pótdíja, ha túlsúly, 192 \$ lenne. 2 pont

Így (az egyedül utazó utas adatai alapján), hogy 99 kg poggyászért összesen $402 + 192 = 594$ \$ pótdíjat kellene fizetni, ha nem lenne ingyenesen felvihető mennyiség. 2 pont

Ez azt jelenti, hogy a pótdíj $594 : 99 = 6$ \$ kg-onként. 1 pont

Tehát az egyedül utazó utas $402 : 6 = 67$ kg után fizetett pótdíjat, vagyis $99 - 67 = 32$ kg az ingyenesen felvihető tömegű csomag. 1 pont

Ellenőrzés: a házaspár $90 : 6 = 15$ kg, illetve $120 : 6 = 20$ kg után fizetett pótdíjat, vagyis $32 + 15 = 47$ kg, illetve $32 + 20 = 52$ kg tömegű csomagjuk volt, ami összesen valóban $47 + 52 = 99$ kg. 1 pont

Összesen: **8 pont**

2. megoldás. A feladat egyenlettel, egyenletrendszerrel is megoldható, például ismeretlent (x) bevezetve az ingyenesen felvihető tömegre és a pótdíj kg-onkénti mértékére (y) 1 pont

felírhatók az alábbi egyenletek:

$$x + \frac{90}{y} + x + \frac{120}{y} = 99, \qquad (1) \qquad 1 \text{ pont}$$

$$x + \frac{402}{y} = 99. \qquad (2) \qquad 1 \text{ pont}$$

$\frac{6}{y} = z$ helyettesítéssel (nem szükséges, de átláthatóbb):

$$2x + 35z = 99, \qquad (1)$$

$$x + 67z = 99. \qquad (2)$$

A két egyenlet jobb oldala egyenlő, így a bal oldalaik is, ezért $x = 32z$ (vagy $x = \frac{192}{y}$) 1 pont

adódik, ahonnan behelyettesítéssel $99z = 99$, vagyis $z = 1$ (vagy $\frac{6}{y} = 1$), 1 pont

amiből megkapjuk, hogy $x = 32$ (kg) 1 pont

és $y = 6$ (\$/kg) 1 pont

A házaspár $90 : 6 = 15$ kg, illetve $120 : 6 = 20$ kg után fizetett pótdíjat vagyis $32 + 15 = 47$ kg, illetve $32 + 20 = 52$ kg tömegű csomagjuk volt, ami összesen valóban $47 + 52 = 99$ kg. Az egyedülálló személy által fizetendő pótdíj $(99 - 32) \cdot 6 = 67 \cdot 6 = 402$ \$ valóban. 1 pont

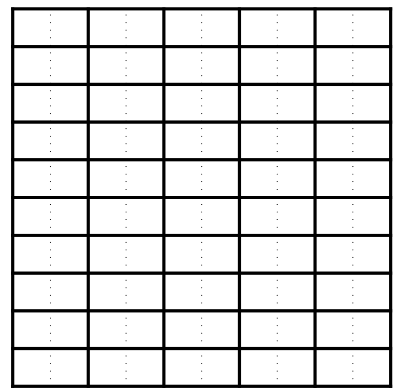
Összesen: **8 pont**

5. Egy 10×10-es táblázat minden mezőjét pirosra, fehérre vagy zöldre színezzük. A táblázatban 20 piros mező található, és az oldalszomszédos egységnégyzetek mindig különböző színűek. A két szomszédos mezőből álló részeket tekinthetjük egy dominónak. Egy dominót nevezzünk jónak, ha egyik része zöld, a másik pedig fehér színű.

a) Bizonyítsuk be, hogy a táblázatból mindig ki lehet vágni 30 jó dominót.
b) Adjunk példát olyan táblázatra, amiből 40 jó dominót lehet kivágni.
c) Konstruáljunk olyan táblázatot, amelyből nem lehet 30-nál több jó dominót kivágni. **10 pont**

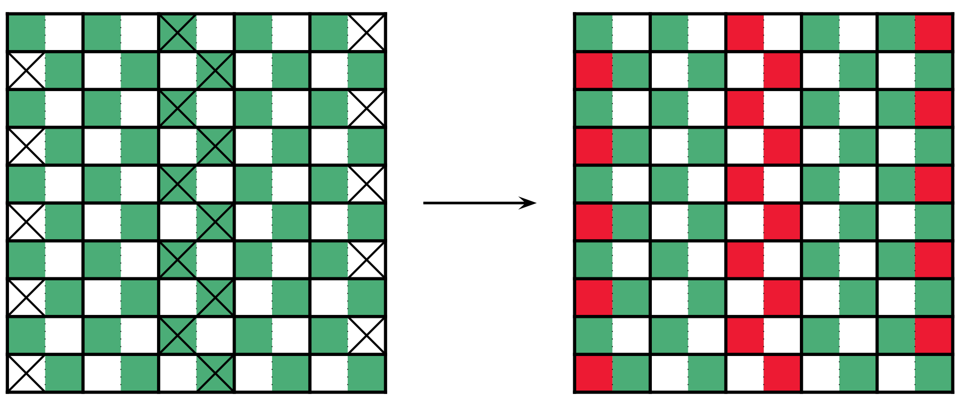
Megoldás.

a) Osszuk fel a táblázatot az ábra szerint 50 dominóra. Ezek közül legfeljebb 20 tartalmaz piros színű mezőt. A többi 30 mindegyike jó dominó, mivel nincs két szomszédos egységnégyzete azonos színűre festve.



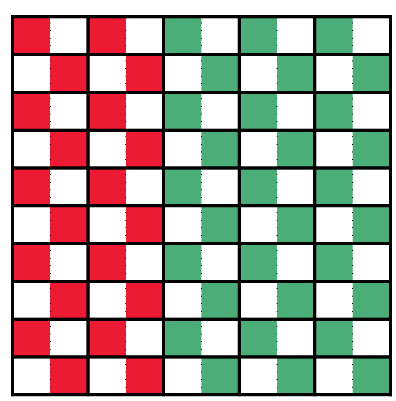
2 pont

b) Színezzük ki a táblázatot a sakktábla mintájára zöld-fehérre, majd a megjelölt 20 mezőt fessük át pirosra. Végül a táblázat többi részét az ábra szerint osszuk fel 40 dominóra. Így a kívánt esethez juthatunk.



4 pont

c) Osszuk fel a táblázatot az *a)* pontban leírtak szerint, majd fessük zöld-fehérre a *b)* szerint. Ha ezután bármely 20 zöld cellát átfestjük pirosra, akkor összesen 30 jó dominónk lesz. Egy lehetőséget mutat be a következő ábra:



4 pont

Összesen: **10 pont**