

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2023/2024-es tanév

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - yz = |y - z| + 1$$

$$y^2 - zx = |z - x| + 1$$

$$z^2 - xy = |x - y| + 1$$

egyenletrendszer.

10 pont

2. Egy 10×10 -es tábla minden mezőjébe beírtuk az $1, 2, \dots, 10$ számok valamelyikét úgy, hogy bármely két közös éllel vagy csúccsal rendelkező mezőbe írt szám relatív prím egymással. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám, amelyet legalább 17-szer írtunk le!

10 pont

3. Adott egy $ABCD$ rombusz és a beírt köre. A PQ szakaszt úgy vesszük fel, hogy P az AB oldal, Q pedig az AD oldal egy-egy belső pontja legyen, és PQ érintse a rombusz beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy CPQ háromszög területe nem függ PQ helyzetétől, vagyis bármely, a feltételeknek megfelelő PQ választása esetén ugyanakkora (állandó).

10 pont