

## Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2023/2024-es tanév

### Kezdők III. kategória 1. forduló

#### Feladatok

1. Az  $ABCD$  konvex négyszögben  $\angle ABC = \angle DAB = 45^\circ$ , valamint  $AB = 7\sqrt{2}$ ,  $BC = 4$ ,  $DA = 3$ . Határozzuk meg a  $CD$  oldal hosszát. **6 pont**
2. Legyenek  $x, y, z$  pozitív valós számok úgy, hogy  $x + y + z = 2024$ . Bizonyítsuk be, hogy 
$$\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} \leq 3036.$$
 **6 pont**
3. Egy kavicsot helyezünk el a derékszögű koordinátarendszer  $(m, n)$  koordinátájú rácspontjába, majd a következő játékot játszunk. Ha a kavics az  $(x, y)$  pontban van, akkor áthelyezhetjük az  $(x - 1, y - 1)$ ,  $(x + 1, y + 1)$ ,  $(11x, y)$  és  $(x, 11y)$  pontok valamelyikébe. Határozzuk meg azokat az  $(m, n)$  kezdőpontokat, ahonnan a kavicsot néhány megengedett lépéssel az origóba juttathatjuk. **8 pont**
4. Legyenek  $a, b, c$  olyan pozitív egész számok, hogy egyik sem osztója a másiknak, továbbá  $ab - b + 1 \mid abc + 1$ . Bizonyítsuk be, hogy  $c > b$ . **10 pont**
5. Hosszabbítsuk meg az  $ABC$  háromszög  $CA$  oldalát  $A$ -n túl  $AB$ -vel, a kapott pontot jelöljük  $D$ -vel. Jelölje  $E$  a  $BAC$  szögfelezőjének és a  $BC$  oldalnak a metszéspontját, és  $F$  az  $AE$  szakasz felezőpontját.  $CF$  és  $AB$  metszéspontját jelöljük  $G$ -vel. Igazoljuk, hogy a  $D, E, G$  pontok egy egyenesre esnek! **10 pont**