Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

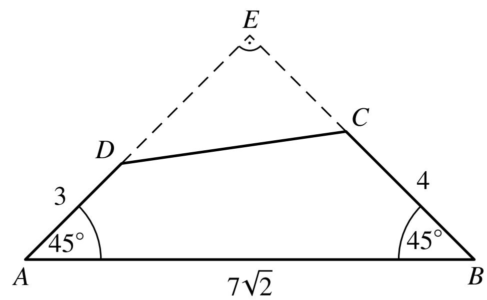
2023/2024-es tanév

Kezdők III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ konvex négyszögben $ABC\sphericalangle = DAB\sphericalangle = 45^\circ$, valamint $AB = 7\sqrt{2}$, $BC = 4$, $DA = 3$. Határozzuk meg a CD oldal hosszát. **6 pont**

Megoldás. Ábra: 1 pont



Legyen az AD és BC félegyenesek metszéspontja E. Ekkor az ABE háromszögben

$$BEA\sphericalangle = 180^\circ - 2\cdot 45^\circ = 90^\circ.$$ 2 pont

Ebben az egyenlő szárú háromszögben a $BE = EA = a$ jelölést bevezetve, és a Pitagorasz-tételt alkalmazva $a^2 + a^2 = (7\sqrt{2})^2$, amiből $a = 7$ adódik. Így $CE = BE - BC = 7 - 4 = 3$ és $DE = AE - AD = 7 - 3 = 4$. 2 pont

Az ABE derékszögű háromszögben szintén a Pitagorasz-tételt alkalmazva

$$CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Tehát a négyszög keresett oldalának hossza 5 egység. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Legyenek x, y, z pozitív valós számok úgy, hogy $x + y + z = 2024$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} \leq 3036.$$ **6 pont**

Megoldás. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\sqrt{xy + xz} = \sqrt{x(y + z)} \leq \frac{x + (y + z)}{2} = \frac{2024}{2} = 1012.$$ 4 pont

Ugyanígy $\sqrt{xy + yz} \leq 1012$ és $\sqrt{xz + yz} \leq 1012$. Ezeket összeadva adódik a bizonyítandó állítás. 2 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Az egyenlőség nem teljesülhet, mivel az $x = y + z$, $y = z + x$, $z = x + y$ feltételek a pozitív valós számok halmazán egyszerre nem állhatnak fenn.

3. Egy kavicsot helyezünk el a derékszögű koordinátarendszer (m,n) koordinátájú rácspontjába, majd a következő játékot játsszuk. Ha a kavics az (x,y) pontban van, akkor áthelyezhetjük az $(x-1,y-1)$, $(x+1,y+1)$, $(11x,y)$ és $(x,11y)$ pontok valamelyikébe. Határozzuk meg azokat az (m,n) kezdőpontokat, ahonnan a kavicsot néhány megengedett lépéssel az origóba juttathatjuk. **8 pont**

Megoldás. Ha az első vagy a második típusú lépést alkalmazzuk, akkor $m-n$ nem változik, ha pedig a harmadik vagy a negyedik típusút, akkor 10 többszörösével nő vagy csökken. Tehát az $m-n$ szám 10-es maradéka végig változatlan marad, így ahhoz, hogy az origót elérjük, mindenképpen

$$m \equiv n \pmod{10}$$

kell, hogy teljesüljön. 3 pont

Most megmutatjuk, hogy ezekből a pontokból az origó mindig elérhető. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $m \geq n$, legyen $m = n + 10k$. A lépések ismételt alkalmazásával

$$(m,n) \mapsto (m-n+1,1) = (10k+1,1) \mapsto (10k+1,11) \mapsto (10(k-1)+1,1)$$
$$(10(k-1)+1,1) \mapsto (10(k-1)+1,11) \mapsto (10(k-2)+1,1).$$
3 pont

Ezt ismételve látható, hogy elérhetünk a $(11,1)$ pontba, ahonnan a

$$(11,1) \mapsto (11,11) \mapsto (0,0)$$

lépésekkel fejezzük be a konstrukciót. 2 pont

Összesen: **8 pont**

4. Legyenek a, b, c olyan pozitív egész számok, hogy egyik sem osztója a másiknak, továbbá $ab-b+1 \mid abc+1$. Bizonyítsuk be, hogy $c > b$. **10 pont**

Megoldás. A feltételből következik, hogy

$$ab-b+1 \mid abc+1-(ab-b+1) = abc-ab+b = b(ac-a+1).$$
2 pont

Mivel $b \mid ab-b$, ezért $(b, ab-b+1) = 1$, vagyis $ab-b+1 \mid ac-a+1$. 2 pont

Ha $ab-b+1 = ac-a+1$ lenne, akkor $a(c-1) = b(a-1)$. Mivel a, b és c közül egyik sem osztja a másikat, ezért a, b, $c > 1$. Továbbá $(a,a-1) = 1$ miatt ekkor $a \mid b$ teljesülne, ami ellentmondás. 2 pont

Tehát $ac-a+1 \geq 2ab-2b+2$, amiből

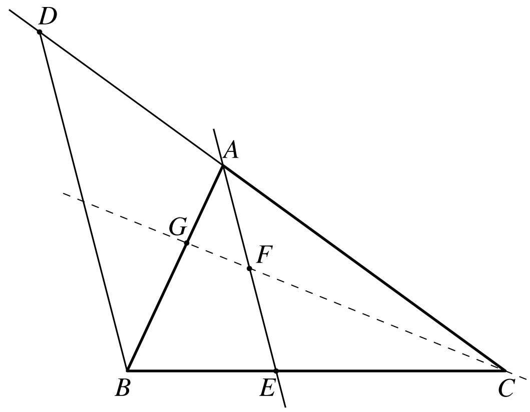
$$ac+2b \geq 2ab+a+1 = ab+ab+a+1 \geq ab+2b+a+1 > ab+2b,$$

azaz $c > b$. 4 pont

Összesen: **10 pont**

5. Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög CA oldalát A-n túl AB-vel, a kapott pontot jelöljük D-vel. Jelölje E a $BAC\sphericalangle$ szögfelezőjének és a BC oldalnak a metszéspontját, és F az AE szakasz felezőpontját. CF és AB metszéspontját jelöljük G-vel. Igazoljuk, hogy a D, E, G pontok egy egyenesre esnek! **10 pont**

Megoldás. Az ADB háromszög egyenlő szárú, ezért $ADB\sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - BAD\sphericalangle)$. 1 pont



Mivel AE felezi CAB szöget, ezért $CAE\sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - BAD\sphericalangle)$. 2 pont

Tehát $BD \parallel AE$, vagyis $ADBE$ trapéz. 1 pont

Ismert, hogy egy trapéz alapjainak felezőpontja, a szárak metszéspontja (ha létezik) és az átlók metszéspontja egy egyenesen vannak. 2 pont

Az $ADBE$ trapéz esetén ez az egyenes a CF egyenes. Ez az AB átlót a G pontban metszi, és mivel tartalmazza az átlók metszéspontját is, ezért ez a metszéspont szükségképpen a G pont lehet csak. 2 pont

Tehát a G rajta van a DE átlón, vagyis az állítást igazoltuk. 2 pont

Összesen: **10 pont**