Bolyai János
Matematikai Társulat

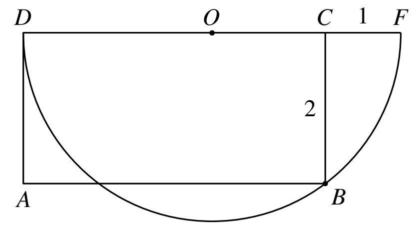
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2024/2025-ös tanév

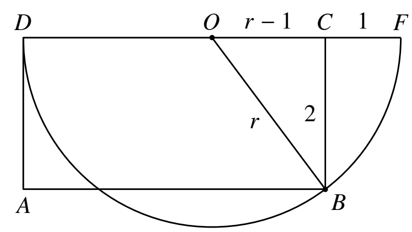
Haladók I. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Jelölje O a DF szakasz felezőpontját és rajzoljunk félkört a DF szakasz fölé. Az $ABCD$ téglalap (az ábra szerint) úgy helyezkedik el, hogy D és B csúcsai illeszkednek a félkörre, valamint a CF szakasz hossza 1, a CB szakasz hossza pedig 2 egység hosszúságú. Mekkora az $ABCD$ téglalap területe? **7 pont**



1. megoldás. Készítsünk vázlatrajzot. 1 pont



A téglalap ismeretlen oldalát jelöljük x-szel. Ekkor a kör sugara $r = \dfrac{x+1}{2}$. 1 pont

A kör középpontját O-val jelölve felírhatjuk az OCB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt: $r^2 = 2^2 + (r-1)^2$. 2 pont

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $r = \dfrac{5}{2}$. 1 pont

Ekkor a téglalap keresett oldala $CD = x = 2r - 1 = 4$ egység hosszúságúnak adódik. 1 pont

A téglalap területe tehát $T = 4 \cdot 2 = 8$ területegység. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Thalész tétele miatt a DBF háromszög B csúcsánál derékszög van. 1 pont

A DBF derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága BC. 1 pont

Ebben a háromszögben felírva a magasságtételt $BC^2 = FC \cdot CD$ adódik. 3 pont

Azaz $2^2 = 1 \cdot CD$, vagyis a CD szakasz 4 egység hosszú. 1 pont

A téglalap területe tehát $T = 4 \cdot 2 = 8$ területegység. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. megoldás. Tükrözzük B pontot DF egyenesére. Ekkor a B pont B' tükörképe a DF szakasz Thalész-körére esik, míg DF ennek a Thalész-körnek az átmérője. 1 pont

Ekkor a (belső) szelőtétel miatt a C ponton átmenő két szelőre teljesül $BC \cdot CB' = FC \cdot CD$. 4 pont

Azaz $2 \cdot 2 = 1 \cdot CD$, vagyis a CD szakasz 4 egység hosszú. 1 pont

A téglalap területe tehát $T = 4 \cdot 2 = 8$ területegység. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az első 12 pozitív egész szám közül leírtunk egymás mellé néhányat úgy, hogy bármely két szomszédos szám közül az egyik osztja a másikat. Legfeljebb hány számot írhattunk fel? **7 pont**

Megoldás. Tegyük fel indirekt, hogy mind a 12 számot sorba lehet rendezni. A prímeknek a többi szám között csak 1 osztója van, továbbá a 7-nek és a 11-nek a kétszerese már nincs ott a felsorolt számok között, így ezek csak az 1-gyel állnak oszthatósági viszonyban. 1 pont

Ha a 7-et és a 11-et is felsoroljuk, ezek állnak a két szélen. Viszont mivel mindkét szám csak az 1-gyel áll oszthatósági viszonyban, így ekkor legfeljebb csak 3 számból állhat a sor.

Tehát mind a 12 számot nem tudjuk a feltételeknek megfelelően felsorolni. 3 pont

Ha viszont egyiküket elhagyjuk, a maradék 11 számot már sorba tudjuk rendezni az előírt módon.

Egy lehetséges konstrukció: $11, 1, 9, 3, 6, 12, 4, 8, 2, 10, 5$. 3 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az utolsó 3 pont helyett adható részpontszám 11-nél kevesebb számból álló sorra mutatott konstrukcióért is a következőek szerint:

- konstrukció 8-nál rövidebb sorra: 0 pont
- konstrukció 8 vagy 9 hosszú sorra: 1 pont
- konstrukció 10 hosszú sorra: 2 pont

3. Határozzuk meg a pozitív valós számokon értelmezett

$$x^{1011}+x^{1010}+\cdots+x^2+x^1+x^0+\frac{1}{x^0}+\frac{1}{x^1}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^{1010}}+\frac{1}{x^{1011}}$$

kifejezés legkisebb értékét. Milyen valós szám esetén veszi fel a kifejezés ezt az értéket? **7 pont**

Megoldás. Az összeadandók csoportosításával alkossunk párokat.

$$\left(x^{1011}+\frac{1}{x^{1011}}\right)+\left(x^{1010}+\frac{1}{x^{1010}}\right)+\cdots+\left(x^1+\frac{1}{x^1}\right)+\left(x^0+\frac{1}{x^0}\right)$$ 2 pont

A zárójelekben lévő kifejezések mindegyikére alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepek közötti összefüggést:

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cdot\frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2}\geq 2\cdot\sqrt{x^n\cdot\frac{1}{x^n}}=2$$ 2 pont

Így az 1012 tagú összeg legkisebb lehetséges értéke $1012\cdot 2=2024$. 1 pont

A legkisebb értéket az egyes párok a tagok egyenlőségekor veszik fel, ekkor:

$$x^n=\frac{1}{x^n}\Rightarrow x^{2n}=1\Rightarrow x=1,$$

és ekkor a kifejezés értéke valóban 2024.

Tehát a kifejezés a legkisebb értékét $x=1$ esetén veszi fel. 2 pont

Összesen: **7 pont**

4. Hány pozitív egész $(n;k)$ számpár elégíti ki a következő egyenletet?

$$kn + n + 3k = 2021$$ **7 pont**

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalához hármat adva a bal oldal a következő módon szorzattá alakítható: $(n+3)(k+1) = 2024$. 1 pont

A $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ prímtényezős felbontás alapján 2024 osztóit párokban felsorolva: 1 pont

$2024 = 1 \cdot 2024 = 2 \cdot 1012 = 4 \cdot 506 = 8 \cdot 253 = 11 \cdot 184 = 22 \cdot 92 = 23 \cdot 88 = 44 \cdot 46$, összesen 8 pozitív osztópárt (és 16 pozitív osztót) kapunk. 1 pont

A negatív osztókat is figyelembe véve a 2024-nek 32 darab osztója van.

Mivel k pozitív, ezért $k+1$ nem lehet 1 vagy 1-nél kisebb, míg n pozitivitása miatt $n+3$ nem lehet 3 vagy 3-nál kisebb. Azaz a $k+1 = 1$, $n+3 = 2024$ és a $k+1 = 2024$, $n+3 = 1$, illetve a $k+1 = 1012$, $n+3 = 2$ osztópárok és a negatív osztópárok sem adnak n-re és k-ra is pozitív megoldást. 2 pont

Azaz összesen $16 - 1 - 2 = 13$ darab pozitív egész $(n;k)$ számpár elégíti ki az egyenletet. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Ha a versenyző utal rá, hogy a negatív osztópárok nem adnak helyes megoldást, az utolsó 4 pontból kapjon meg 1-et, továbbá ha valamilyen módon felsorolja az alábbi táblázatban található 13 megoldást, kapja meg a további 3 pontot.

$(n+3)$	4	8	11	22	23	44	46	88	92	184	253	506	1012
$(k+1)$	506	253	184	92	88	46	44	23	22	11	8	4	2
n	1	5	8	19	20	41	43	85	89	181	250	503	1009
k	505	252	183	91	87	45	43	22	21	10	7	3	1

5. 10 osztálytárs színházba megy, ahol ugyanabban a sorban, egymás melletti székeken kapnak helyet. A szünetről visszatérve ugyanazokat az üléseket foglalják el, de nem mindenki ül vissza a saját helyére. Aki máshová ül, az eredeti helye melletti ülésre kerül. Hányféleképpen ülhetnek vissza, ha pontosan

a) 2 diák ül vissza az eredeti helyére?

b) 3 diák ül vissza az eredeti helyére?

c) 4 diák ül vissza az eredeti helyére? **7 pont**

Megoldás. A szünetről visszatérve csakis úgy változhat meg az ülésrend, hogy két-két egymás mellett ülő diák cserél helyet. 1 pont

Például vegyük balról az első olyan diákot, aki mozgott. Ő csak egy hellyel jobbra ülhet, és az ő helyét csak a jobb oldali szomszédja foglalhatta el. Ha van még helycsere, ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva a tőlük jobbra ülő diákokra, ugyanígy csak egymás melletti diákok cserélhetnek helyet. 1 pont

a) Ha ketten ülnek vissza, akkor 4 párban volt helycsere, és ketten maradtak helyben. 1 pont

A helyben maradó diákokat egyesével, a helyet cserélőket pedig páronként egy-egy blokknak tekintve összesen 6 blokk van, amelyek közül a két darab egy fős blokk helyét kell kiválasztani. Ezt $\binom{6}{2} = 15$-féle módon tehetjük meg. 1 pont

b) Mivel összesen páros számú diák van, és a cserék is párokban történnek, a helyben maradó diákok száma is páros lesz. 3 helyben maradó diák esetén így a lehetséges sorrendek száma 0. 1 pont

c) Ha 4 diák marad helyben, akkor 3 párban történik helycsere. Most 7 blokkból kell 4-et kiválasztanunk, 1 pont

azaz ekkor $\binom{7}{4} = 35$ lehetőség van. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az *a)* és a *c)* feladatrészekre járó pontokat akkor is kapja meg a versenyző, ha helyesen felírja az összes lehetőséget.