Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2024/2025-ös tanév

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. A 2024 olyan pozitív négyjegyű szám, amelyben a páros számjegyek száma páros. Hány ilyen tulajdonságú pozitív négyjegyű szám van? **6 pont**

1. megoldás. A számban összesen 4, 2 vagy 0 db páros számjegy lehet. 1 pont

– 4 páros számjegy van benne: Az első helyen 2, 4, 6, 8 állhat, az összes többi helyen 0, 2, 4, 6, 8, így ezek száma: $4 \cdot 5^3$.

– 2 páros számjegy van benne
ppnn alakú: $4 \cdot 5^3$ (p: páros, n: nem páros)
pnpn alakú: $4 \cdot 5^3$
pnnp alakú: $4 \cdot 5^3$
nppn alakú: 5^4
npnp alakú: 5^4
nnpp alakú: 5^4 darab van. 3 pont

– 0 páros számjegy van benne: 5^4 darab van. 1 pont

Tehát összesen $4 \cdot 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 = 4500$ olyan négyjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páros. 1 pont

Összesen: 6 pont

2. megoldás. A négyjegyű számok száma: $9 \cdot 10^3$, egy szám rossz, ha 1 vagy 3 páros számjegy van benne. 1 pont

Rosszak: – 1 páros számjegy:
pnnn alakú $4 \cdot 5^3$.
npnn, nnpn, nnnp alakú összesen $3 \cdot 5^4$. 2 pont

– 3 páros számjegy:
pppn, ppnp, pnpp alakú összesen $3 \cdot 4 \cdot 5^3$. 2 pont
nppp alakú 5^4. 2 pont

Tehát összesen $9 \cdot 10^3 - 4 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^4 - 3 \cdot 4 \cdot 5^3 - 5^4 = 4500$ olyan négyjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páros. 1 pont

Összesen: 6 pont

3. megoldás. Az első három számjegy bármi lehet, a negyedik dönti el, hogy páros vagy páratlan sok páros számjegy van-e számban vagy sem. 2 pont

Mivel az első három számjegy mindegyikéhez ötféle páros és ötféle páratlan számot tudunk negyedikként hozzáírni, 2 pont

ezért a számok felére, azaz 9000 szám közül 4500-ra teljesül a feladat feltétele. 2 pont

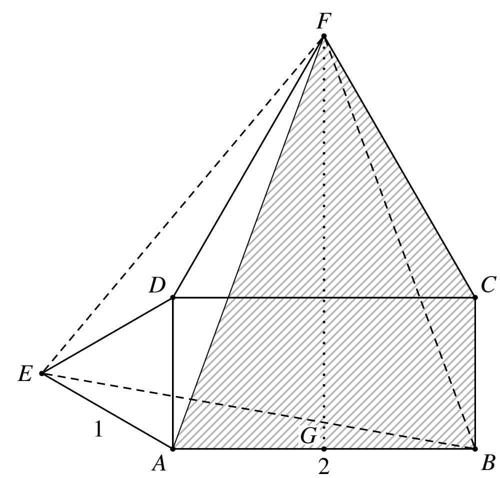
Összesen: **6 pont**

2. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2$ cm, $BC = 1$ cm. Az AD oldalra írt szabályos háromszög harmadik csúcsa legyen E, a DC oldalra írt szabályos háromszög harmadik csúcsa legyen F. (A háromszögeknek az adott oldalakon kívül nincs más közös pontja a téglalappal.)

a) Bizonyítsuk be, hogy az EFB háromszög szabályos!

b) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCF$ négyszög területe több, mint $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ cm^2! **6 pont**

Megoldás. *a)* Az EAB, illetve BCF szög egyaránt $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$-os. Az EDF szög szintén 150° $(360^\circ - 2\cdot 60^\circ - 90^\circ)$. 1 pont



Az EDF, BCF, illetve EAB háromszögek mindegyikében van egy 1 cm és egy 2 cm hosszúságú oldal, a bezárt szögük pedig 150°, így egybevágóak, de akkor a harmadik oldalak is egyenlő hosszúságúak, ezért az EFB háromszög valóban szabályos. 2 pont

b) Az ABF háromszög AB oldalához tartozó magassága a DCF szabályos háromszög magasság hosszának és a téglalap kisebb oldalhosszának összege, így $\sqrt{3}+1$ cm. Ezért a háromszög területe:

$$\frac{(\sqrt{3}+1)\cdot 2}{2}\ \text{cm}^2 = \sqrt{3}+1\ \text{cm}^2.$$ 1 pont

Az FCB háromszög BC oldalához tartozó magassága GB, a hossza tehát 1 cm, így a háromszög területe $\frac{1\cdot 1}{2}$ cm$^2 = 0{,}5$ cm^2. 1 pont

A négyszög területe a két terület összege: $(\sqrt{3}+1{,}5)$ cm^2, ami valóban több, mint $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm^2, mert $\sqrt{2} < 1{,}5$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. Egy játszóházban egy csúszda alatti térben egyforma méretű piros, kék, zöld és sárga labdák vannak. Ezek közül egy bohóc beletölt néhányat egy zsákba és a következőket árulja el a zsák tartalmáról: Ha bekötött szemmel húzunk a zsákból, akkor

(1) legalább 4 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük két egyforma színű;

(2) legalább 8 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük piros vagy zöld;

(3) legalább 17 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük zöld vagy sárga;

(4) legalább 20 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük piros és zöld és

(5) legalább 22 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük kék vagy sárga.

Hány darab van az egyes színű labdákból a zsákban összesen? **6 pont**

Megoldás. (1) miatt csak háromféle szín szerepel a zsákban. (Csak három különböző színű labdát tudunk kihúzni, a 4. már biztosan egyező színű lesz valamelyikkel.) 1 pont

(2) miatt 7 labda kék vagy sárga. (Csak 7 kék, illetve sárga labdát tudunk kihúzni, a 8. már biztosan piros vagy zöld lesz.) 1 pont

Hasonlóan (5) miatt 21 labda piros vagy zöld, így összesen 28 labda van a zsákban. 1 pont

(2) és (4) miatt tudjuk, hogy a piros és zöld közül valamelyikből 12 van. (Ennyivel több labdát kell kihúzni, ha azt szeretnénk, hogy mindkét szín szerepeljen.) 1 pont

Ha pirosból lenne 12, akkor (5) miatt 9 zöld labda lenne, (3) miatt 4 kék labda lenne, (2) miatt pedig 3 sárga, de akkor mind a négy szín szerepelne. 1 pont

Tehát csak zöldből lehet 12, ekkor (5) miatt 9 piros van, (3) miatt 7 kék labda van, (2) miatt 0 sárga – ez megfelel a feladat követelményeinek.

Tehát 9 piros, 7 kék, 12 zöld és 0 sárga golyó van a zsákban. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzések.

1. Az indoklás nélküli helyes eredményért 2 pont adható.

2. Ha a versenyző nem vizsgálja mindkét esetet, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat. (Más gondolatmenettel is el lehet jutni a kapott eredményhez, de annak során is több esetet kell megvizsgálni.)

4. Rózi az 1-től 100-ig terjedő pozitív egész számok segítségével felírta a felváltva kivonásokból és összeadásokból álló

$$1-2+3-4+5-6+\ldots-98+99-100$$

műveletsort. Ezután kitörölte az egyik műveleti jelet, és helyette az $=$ jelet írta. Így éppen egy helyes egyenlőséget kapott. Melyik szám elé kerülhetett az egyenlőségjel? Adjuk meg az összes lehetőséget, és a válaszunkat indokoljuk! **6 pont**

Megoldás. *1. eset.* Tegyük fel, hogy Rózi a $(2k)$. $(1 \le k \le 49,\ k \in \mathbb{N}^+)$ szám utáni összeadásjel helyett írt egyenlőséget. Ekkor

$$(1-2)+(3-4)+\ldots+\left[(2k-1)-2k\right]=(-1)+(-1)+\ldots+(-1)=-k$$ 1 pont

$$\left[(2k+1)-(2k+2)\right]+\left[(2k+3)-(2k+4)\right]+\ldots+(99-100)=(-1)+(-1)+\ldots+(-1)=-(50-k)$$ 1 pont

A kialakított egyenlőség alapján:

$$-k=-(50-k),$$
$$k=25.$$

Ez azt jelenti, hogy Rózi a $2\cdot 25+1=51$ előtti $+$ jelet írhatta át egyenlőségre. 1 pont

2. eset. Ezután vizsgáljuk azt az esetet, amikor Rózi a $(2k)$. szám előtti kivonásjel helyett írt egyenlőségjelet. Ekkor

$$1-2+3-4+\ldots+(2k-3)-(2k-2)+(2k-1)=$$
$$=1+(3-2)+(5-4)+\ldots+[(2k-1)-(2k-2)]=1+1+1+\ldots+1=k, \qquad \text{1 pont}$$
$$2k+\big[(2k+1)-(2k+2)\big]+\big[(2k+3)-(2k+4)\big]+\ldots+(99-100)=$$
$$=2k-1-1-\ldots-1=2k-(50-k)=3k-50. \qquad \text{1 pont}$$

A kialakított egyenlőség alapján:

$$k=3k-50,$$
$$k=25.$$

Ez azt jelenti, hogy Rózi az 50-es szám előtti kivonásjelet is átírhatta egyenlőségjelre. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. A fenti eredmény „okoskodással” is megkapható.

2. megoldás. A felírt művelet eredménye $(-1)\cdot 50=-50$. Az elejétől kezdve tagonként összegezve a számokat az 1, -1, 2, -2, …, 49, -49, 50, -50 részletösszegek adódnak. 1 pont

Ha egy összeadásjelet írunk át egyenlőségjelre, akkor a két részben lévő számok összege ugyanannyi: -25. A -25 csak egyszer fordul elő ezek között, nevezetesen az 50-edik tag után – tehát az 51-edik tag előtt –, vagyis az 51 előtti összeadásjelet írtuk át egyenlőségjelre. 1 pont

Ha viszont egy kivonásjelet írunk át – az a-adik szám előtt – egyenlőségjelre, akkor a tagok összege (mivel ekkor $-a$ helyett a szerepel): $-50+2a$. Az egy-egy részben lévő számok összege ennek a fele: $-25+a$. 1 pont

Ebből következik, hogy 1-től $(a-1)$-ig véve a tagokat a művelet eredménye $-25+a$, viszont ha továbblépünk, és 1-től a-ig tekintjük a tagokat (vagyis ha mégiscsak kivonjuk a-t), akkor az eredmény ennél a-val kevesebb: $(-25+a)-a=-25$. 2 pont

Mivel -25 csak egyszer szerepel a részletösszegekben (ha 1-től 50-ig végezzük el a műveletet), ebből következik, hogy a csak 50 lehet. Tehát a az 50-edik tag, és előtte valóban kivonásjel szerepel, vagyis az 50 előtti kivonásjel helyére került az egyenlőségjel. 1 pont

(A két részben lévő számok összege pedig $-25+50=25$.)

Összesen: **6 pont**